Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике

2017/18 учебный год

9 класс

Ответы и решения задач

1. УСЛОВИЕ

На прямой отметили несколько точек. Затем между каждыми двумя соседними точками отметили еще по точке, после чего проделали эту операцию ещё раз. В итоге получилась 101 точка. Сколько точек было отмечено вначале?

Решение. Пусть вначале было отмечено k точек. Тогда к ним добавилась еще $k – 1$ точка (по одной между первой и второй, второй и третьей, …, k – 1-й и k-й отмеченными точками), а затем ещё $(k + (k - 1)) – 1 = 2k – 2$ точки. Всего точек в итоге стало $4k – 3$. Решая уравнение $4k – 3 = 101$, находим ответ.

Ответ: 26.

2. УСЛОВИЕ

Гонцу надо пробежать 24 мили. Две трети этого расстояния он бежал со средней скоростью 8 миль в час. Сможет ли он, увеличив скорость, пробежать остаток пути так, чтобы его средняя скорость на всём пути равнялась 12 миль в час?

Решение. Чтобы средняя скорость гонца на всем пути равнялась 12 милям в час, он должен пробежать 24 мили за 2 часа. Но эти 2 часа он уже потратил на первые 16 миль.

Ответ: не сможет.

3. УСЛОВИЕ

Перпендикуляры BE и DF, опущенные из вершин B и D параллелограмма $ABCD$ на стороны AD и BC соответственно, делят параллелограмм на три части равной площади. На продолжении диагонали BD за вершину D отложен отрезок DG, равный отрезку BD. Прямая BE пересекает отрезок AG в точке H. Найдите отношение $AH : HG$.

Решение. По условию $(AE \cdot BE) : 2 = ED \cdot BE$, откуда $AE = 2\ ED$. Заметим, что AD – медиана треугольника ABG. Поэтому отрезок BH, делящий медиану AD в отношении $AE : ED = 2$, тоже медиана треугольника ABG.

Ответ: 1 : 1.

4. УСЛОВИЕ

Сумма трех неотрицательных чисел x_1, x_2 и x_3 не превосходит 1/2. Докажите, что $(1 – x_1)(1 – x_2)(1 – x_3) \geq 1/2$.

Решение. Преобразуем левую часть A доказываемого неравенства:

$A = (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) = 1 - (x_1 + x_2 + x_3) + x_1x_2(1 - x_3) + x_2x_3 + x_1x_3$. Из условия следует, что $x_1x_2(1 - x_3) \ge 0$, $x_2x_3 \ge 0$ и $x_1x_3 \ge 0$, поэтому $A \ge 1 - (x_1 + x_2 + x_3) \ge 1/2$.

Замечание. Равенство достигается, когда одно из данных чисел равно 1/2, а два других равны 0.

5. УСЛОВИЕ

По кругу записано n целых чисел, сумма которых равна 94. Известно, что любое число равно модулю разности двух следующих за ним чисел. Найдите все возможные значения n.

Решение. Из условия следует, что все записанные числа неотрицательны. Пусть a – наибольшее из этих чисел (если таких несколько, то выберем любое из них), а b, c, d, e – следующие за ним по кругу числа. Тогда $a = |b - c|$, что возможно, только если одно из чисел b или c равно a, а другое равно 0. Если $b = a$, $c = 0$, то из равенства $b = |c - d|$ следует, что $d = a$. Из равенства $c = |d - e|$, следует, что $e = a$, и т.д. Если же $b = 0$, а $c = a$, то аналогично $d = a$, $e = 0$ и т.д. Таким образом, n делится на 3, $n = 3m$, и записанные числа таковы: $a, a, 0, a, a, 0, \ldots, a, a, 0$. Их сумма равна $2ma$. Из равенства $2ma = 94$ следует, что $ma = 47$, т.е. $m = 47$, $a = 1$ или $m = 1$, $a = 47$, откуда $n = 141$ или $n = 3$.

Ответ: $n = 3$ или $n = 141$.

6. УСЛОВИЕ

Доска размером 4 х 4 клетки покрыта 13 прямоугольниками размером 1 х 2 клетки, стороны которых идут по сторонам клеток. Докажите, что один из прямоугольников можно убрать так, что оставшиеся будут по-прежнему покрывать всю доску.

Доказательство. Предположим, что ни один прямоугольник убрать нельзя. Это значит, что у каждого прямоугольника есть половинка, которая не закрыта другими прямоугольниками. Эти 13 половинок закрывают различные клетки доски. На доске остаются 3 клетки, которые закрыты оставшимися 13 половинками прямоугольников. Значит, одна из этих клеток закрыта не менее чем пятью прямоугольниками. Но прямоугольник клетку может закрывать только четырьмя различными способами: слева, справа, сверху и снизу. Значит, два прямоугольника лежат друг на друге и один из них можно убрать – противоречие.