2017 год

Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап
Решения

9 класс

1. Из данного равенства следует, что $2a(a - b) + b(a + b) = 2(a^2 - b^2)$, $b(3b - a) = 0$, откуда $b = 0$ или $a = 3b$. Оба случая реализуются. Если $b = 0$, то данное равенство выполняется при всех $a \neq 0$, а значение выражения $\frac{3a-b}{a+5b}$ при всех таких a и b равно 3. Если $a = 3b$ и a и b отличны от нуля, то данное равенство выполняется, а значение выражения $\frac{3a-b}{a+5b}$ при всех указанных a и b равно 1.

   Ответ: 1 и 3.

2. Пусть $m - 1, m, m + 1$ – исходные числа. Тогда $N = (m - 1)m(m + 1) - ((m - 1) + m + (m + 1)) = m(m^2 - 1) - 3m = m(m^2 - 4) = (m - 2)m(m + 2)$. Числа $m - 2, m, m + 2$ либо последовательные четные, либо последовательные нечетные. Но так как N нечетное, то и числа $m - 2$, m, $m + 2$ нечетные, что и требовалось доказать.

3. Медиана CK треугольника ABC является также высотой и биссектрисой, т.к. треугольник равнобедренный. Поэтому $\angle KBC = \angle KCB = \angle KCA = 45^0$. Отсюда $KC = KB$, и, значит, треугольники KBL и KCM равны по двум сторонам $(KC = KB, BL = CM)$ и углу между ними. Поэтому $KL = KM$, и из равенства $\angle BKL = \angle CKM$ следует $\angle LKM = \angle LKC + \angle CKM = \angle LKC + \angle BKL = \angle BKC = 90^0$. Значит, треугольник LMK – прямоугольный равнобедренный.

4. Пусть в день двенадцатилетия Андрея Василию исполняется x лет. Тогда Сергею в этот же день исполняется $12 - x$ лет. Составим следующую таблицу:

	A	B	C
день 12-летия Андрея	12	x	12 - x
день 12-летия Василия	24 - x	12	24 - 2 x
день 12-летия Сергея	12 + x	2x	12

   Числа второй строки получаются из чисел первой добавлением к ним слагаемого $12 - x$, а числа третьей строки – добавлением к числам первой слагаемого x. Когда Василию будет 12 лет, то Андрею и Сергею в сумме будет $48 - 3x$ лет, а следовательно, $3x$ делится на 12. Но в день двенадцатилетия Сергея Андрею и Василию в сумме исполнится $12 + 3x$. Это число также делится на 12.

5. Укажем способ отыскания настоящей монеты. Для первого взвешивания положим на чашки весов по 4 монеты. Возможны два случая.

    1. Одна из чашек перевесила. Обозначим через A, B, C и D массы монет на этой чашке; ясно, что хотя бы одна из этих монет настоящая. Вторым взвешиванием сравниваем величины A + B и C + D. Если A + B > C + D или A + B = C + D, то монеты с массами A и B не могут быть фальшивыми, и тогда третьим взвешиванием сравниваем A и B. Более тяжелая из монет обязательно настоящая, а при A = B настоящие обе. Если же A + B < C + D, то третьим взвешиванием сравним C и D.
    2. При первом взвешивании зафиксировано равенство масс. Это значит, что на чашках по одинаковому числу фальшивых монет, а общее число взвешенных фальшивых монет четно. Следовательно, среди остальных 7 монет число фальшивых также четно. Для второго взвешивания положим на чашки по 2 монеты из ранее не взвешенных. Если какая-то пара тяжелее, то третьим взвешиванием сравним монеты этой пары; монета, которая тяжелее или равна другой, настоящая. Если же массы пар монет во втором взвешивании равны, то в этих парах по одинаковому числу фальшивых монет, общее число фальшивых среди взвешенных четно, четно оно и среди 3 оставшихся (ни разу не взвешенных). Тогда возьмем любые 2 из этих 3 монет и сравним их массы; если какая-то чашка перевесит, то монета на ней настоящая, в случае же равенства настоящей обязательно будет третья монета.

Ответ: Можно.