

## 9 класс

1. Россия, Германия и Франция решили построить газопровод «Северный поток — 2» длиной 1200 км, договорившись финансировать этот проект поровну. В итоге, Россия построила 650 километров газопровода, Германия 550 километров газопровода, а Франция внесла свою долю деньгами. При этом Германия получила от Франции 1,2 миллиарда евро. Сколько при этом должна получить от Франции Россия?

2. Числа  $p, q, r$  и  $s$  таковы, что квадратные уравнения  $x^2 + px + q = 0$  и  $x^2 + rx + s = 0$  не имеют решений. Может ли иметь решение уравнение  $2017x^2 + (1009p + 1008r)x + 1009q + 1008s = 0$ ?

3. Длина стороны квадрата – целое число. На каждой стороне квадрата вне его построена трапеция так, что верхние основания трапеций и их боковые стороны образуют правильный двенадцатиугольник. Может ли площадь этого двенадцатиугольника равняться  $2 \underbrace{1111 \dots 11}_{2017 \text{ единиц}}$ ?

4. В четырехугольник  $ABCD$  вписана окружность с центром в точке  $O$ . Отрезки  $OA, OB, OC$  и  $OD$  пересекаются с окружностью в точках  $K, L, M$  и  $N$  соответственно.  $P$  - точка пересечения диагоналей четырехугольника  $KLMN$ ,  $Q$  - середина отрезка  $KL$ . Докажите, что прямые  $PQ$  и  $MN$  перпендикулярны.

5. В Изумрудном городе есть социальная сеть «Волшебное зеркало», которой пользуются только жители этого города. Суммарное количество друзей в «Волшебном зеркале» у любых двух жителей Изумрудного города не меньше, чем численность населения всего города. Число жителей города больше 2.

а) Докажите, что у каждого жителя Изумрудного города в «Волшебном зеркале» есть, по крайней мере, два друга.

б) Правитель Изумрудного города Страшила отправит всем своим друзьям в «Волшебном зеркале» сообщение, они переслали это сообщение всем своим друзьям, а те, в свою очередь, переслали сообщение всем своим друзьям и так далее. Докажите, что в итоге сообщение получил каждый житель Изумрудного города.

в) Верно ли, что сообщение по-прежнему получают все жители Изумрудного города, если двое из них удалят друг друга из друзей перед его отправкой Страшилой?

Составитель всех задач Исаев К.П.

## Критерии проверки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрено отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка + пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

## РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

### 9 класс

1. Россия, Германия и Франция решили построить газопровод «Северный поток — 2» длиной 1200 км, договорившись финансировать этот проект поровну. В итоге, Россия построила 650 километров газопровода, Германия 550 километров газопровода, а Франция внесла свою долю деньгами. При этом Германия получила от Франции 1,2 миллиарда евро. Сколько при этом должна получить от Франции Россия?

**Решение.** Каждая страна должна была построить по 400 километров газопровода. Таким образом, Россия построила 250 км газопровода за Францию, а Германия 150 км газопровода. Значит, деньги Франции должны быть распределены между Россией и Германией в отношении 5:3. Поэтому Россия получит от Франции  $1,2 \text{ млрд.} \times \frac{5}{3} = 2$  миллиарда евро.

Ответ: 2 млрд. евро.

### Рекомендации по проверке.

Выведено, что Россия получит  $1,2 \text{ млрд.} \times \frac{5}{3}$ , но посчитано неправильно – 6 баллов.

2. Числа  $p, q, r$  и  $s$  таковы, что квадратные уравнения  $x^2 + px + q = 0$  и  $x^2 + rx + s = 0$  не имеют решений. Может ли иметь решение уравнение  $2017x^2 + (1009p + 1008r)x + 1009q + 1008s = 0$ ?

### Решение.

Из условия, следует, что  $p^2 < 4q$  и  $r^2 < 4s$ . Следовательно,

$$pr \leq |pr| < 4\sqrt{qs} \quad (q > 0, s > 0).$$

Дискриминант третьего уравнения

$$\begin{aligned} D &= (1009p + 1008r)^2 - 4 \cdot 2017(1009q + 1008s) = (1009p)^2 + 2 \cdot 1009 \cdot 1008pr + (1008r)^2 - \\ &- 4 \cdot 2017(1009q + 1008s) < 1009^2 \cdot 4q + 2 \cdot 1009 \cdot 1008 \cdot 4\sqrt{qs} + 1008^2 \cdot 4s - \\ &- 4 \cdot 2017(1009q + 1008s) = -4 \cdot 1009 \cdot 1008(\sqrt{q} - \sqrt{s})^2 \leq 0. \end{aligned}$$

То есть,  $D < 0$ . Значит, уравнение не имеет корней.

Ответ: уравнение не может иметь решений.

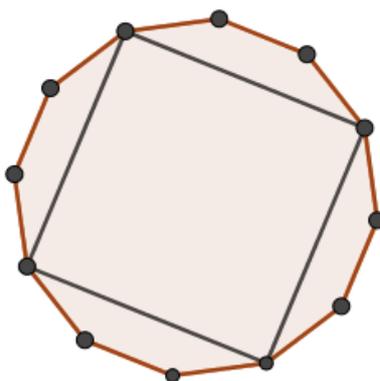
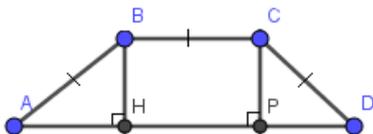
### Рекомендации по проверке.

Ответ без доказательства – 0 баллов.

3. Длина стороны квадрата – целое число. На каждой стороне квадрата вне его построена трапеция так, что верхние основания трапеций и их боковые стороны образуют правильный двенадцатиугольник.

Может ли площадь этого двенадцатиугольника равняться  $2 \underbrace{1111 \dots 11}_{2017 \text{ единиц}}$ ?

### Решение.



$$S_{\text{двенадцатиугольника}} = S_{\text{квадрата}} + 4S_{\text{трапеции}}$$

Пусть сторона квадрата равна  $a \in \mathbb{N}$ . Рассмотрим достраиваемую трапецию  $ABCD$ .

$$\angle ABC = \angle BCD = 180^\circ : 12 = 150^\circ,$$

$$\angle BAD = \angle ADC = \frac{150^\circ - 90^\circ}{2} = 30^\circ.$$

Пусть  $AB = BC = CD = x$ .

$$\frac{AH}{AB} = \cos 30^\circ \Rightarrow \frac{a-x}{2x} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{a}{1+\sqrt{3}},$$

$$BH = CP = \frac{x}{2} = \frac{a}{2(1+\sqrt{3})}.$$

$$S_{\text{трапеции}} = \frac{AD+BC}{2} \cdot BH = \frac{a+x}{2} \cdot \frac{a}{2(1+\sqrt{3})} = \frac{a^2}{8}.$$

$$S_{\text{двенадцатиугольника}} = a^2 + \frac{4a^2}{8} = \frac{3a^2}{2}.$$

$$\text{Таким образом, } \frac{3a^2}{2} = 2 \underbrace{1111 \dots 11}_{2017 \text{ единиц}} \Rightarrow a^2 = 14 \underbrace{074074 \dots 074}_{2016 \text{ цифр}}.$$

Последнее число делится на 2, но не делится на 4, так как 74 не делится на 4.

Замечание. Могут быть использованы другие признаки делимости, например, на 9: число

$\underbrace{14 \ 074074 \ \dots \ 074}_{2016 \text{ цифр}}$  дает при делении на 9 такой же остаток, как и сумма его цифр, которая равна  $5 + 11 \cdot$

2016. Квадрат целого числа не может давать при делении на 9 остаток 5.

Ответ: не может.

### Рекомендации по проверке.

Найдена площадь двенадцатиугольника через сторону квадрата – 4 балла.

4. В четырехугольник  $ABCD$  вписана окружность с центром в точке  $O$ . Отрезки  $OA, OB, OC$  и  $OD$  пересекаются с окружностью в точках  $K, L, M$  и  $N$  соответственно.  $P$  - точка пересечения диагоналей четырехугольника  $KLMN$ ,  $Q$  - середина отрезка  $KL$ . Докажите, что прямые  $PQ$  и  $MN$  перпендикулярны.

### Решение.

$KO$  – биссектриса  $\angle LKN$ ,  $LO$  – биссектриса  $\angle KLM$ . Следовательно,

$$\angle KOL = 180^\circ - \angle LKO - \angle KLO = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle LKN + \angle KLM).$$

Аналогично,  $\angle MON = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle LMN + \angle KNM)$ .

Тогда  $\angle KOL + \angle MON = 360^\circ - \frac{1}{2}(\angle LKN + \angle KLM + \angle LMN + \angle KNM) = 180^\circ$ .

$$\angle KNL + \angle MKN = \frac{1}{2}(\angle KOL + \angle MON) = 90^\circ \Rightarrow KM \perp LN.$$

Пусть  $(PQ) \cap (MN) = T$ .

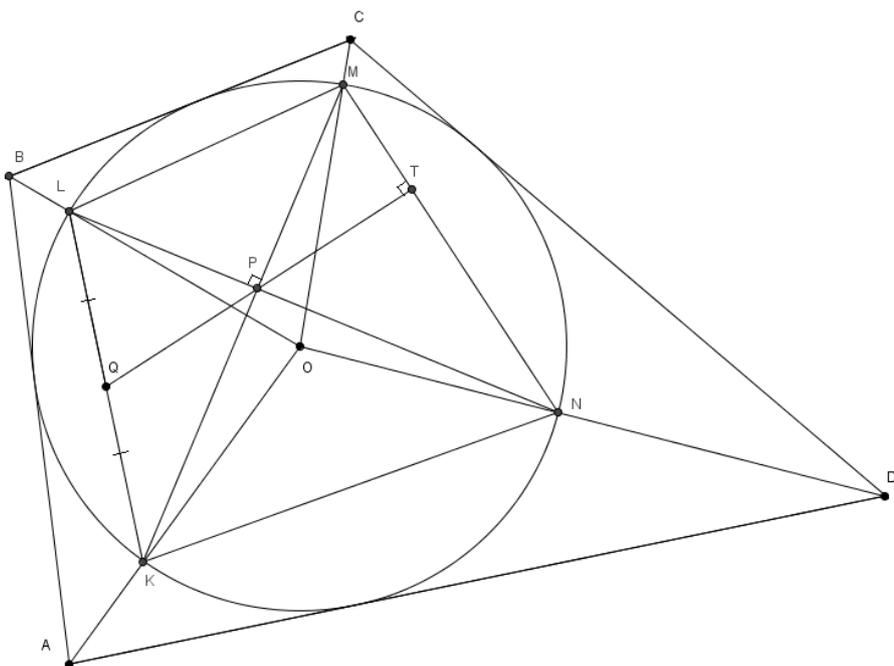
$PQ$  – медиана, опущенная из вершины прямого угла  $\triangle KPL \Rightarrow LQ = QP$

$\Rightarrow \triangle LQP$  – равнобедренный  $\Rightarrow \angle QLP = \angle QPL = \angle NPT$ .

$\angle LKM = \angle LNM$  (опираются на одну дугу).

Значит,  $\angle NPT + \angle LNM = \angle QLP + \angle LKM = 90^\circ \Rightarrow \angle PTN = 90^\circ$

$\Rightarrow PQ \perp MN$ .



### Рекомендации по проверке.

Доказано, что  $\angle KOL + \angle MON = \angle LOM + \angle KON = 180^\circ$  - 2 балла.

Доказано, что  $KM \perp LN$  - 3 балла.

5. В Изумрудном городе есть социальная сеть «Волшебное зеркало», которой пользуются только жители этого города. Суммарное количество друзей в «Волшебном зеркале» у любых двух жителей Изумрудного города не меньше, чем численность населения всего города. Число жителей города больше 2.

а) Докажите, что у каждого жителя Изумрудного города в «Волшебном зеркале» есть, по крайней мере, два друга.

б) Правитель Изумрудного города Страшила отправит всем своим друзьям в «Волшебном зеркале» сообщение, они переслали это сообщение всем своим друзьям, а те, в свою очередь, переслали сообщение всем своим друзьям и так далее. Докажите, что в итоге сообщение получил каждый житель Изумрудного города.

в) Верно ли, что сообщение по-прежнему получают все жители Изумрудного города, если двое из них удалят друг друга из друзей перед его отправкой Страшилой?

### Решение.

а) Пусть количество жителей города равно  $N$ . Допустим, нашелся человек, у которого в списке друзей меньше 2 человек. Возьмем с ним в пару любого человека, не являющегося его другом. Суммарно у них не более  $1 + (N - 2) = N - 1$  друзей, что противоречит условию задачи.

б) Допустим, что это не так: нашелся житель города, не получивший сообщения, назовем его  $A$ . Пусть ровно  $t$  жителей получили сообщение Страшилы,  $t < N - 1$ . Тогда в списке друзей Страшилы - не более  $t$  человек. В список друзей  $A$  не входит никто из этих  $t$  человек, а также Страшила и сам  $A$ , поэтому количество друзей  $A$  - не более  $N - t - 2$ . Суммарное количество друзей у Страшилы и у  $A$  - не более  $N - 2$ , что противоречит условию задачи.

в) Предположим, что  $A$  и  $B$  удалили друг друга из друзей и после этого сообщение Страшилы дошло не до всех жителей города. Пусть оно дошло до  $t$  человек,  $t < N - 1$ . Кто-то из этих двоих ( $A$  или  $B$ ) либо сам является Страшилой, либо до него дошло сообщение Страшилы. Пусть это  $A$ . Тогда в списке друзей  $A$  - не более  $t$  человек, а до удаления из его друзей  $B$  - не более  $t + 1$  человек. Рассмотрим какого-нибудь из оставшихся друзей  $B$ , назовем его  $C$ . Список его друзей не изменился, в этот список не входит  $A$ , никто из друзей  $A$  и сам  $C$ . Значит, в списке друзей  $C$  - не более  $N - (t + 1) - 1$  человек. Суммарно в списках друзей  $A$  и  $C$  было не более  $t + 1 + N - t - 2 = N - 1$  человек, что противоречит условию задачи. Значит, сообщение по-прежнему получают все жители Изумрудного города.

### Рекомендации по проверке.

Доказательство пункта а) – 2 балла.

Доказательство пункта б) – 2 балла.