

11 класс (Время решения – 4 часа)

1. Дан конечный набор карточек. На каждой из них написано либо число 1, либо число -1 (на каждой карточке ровно одно число), при этом карточек с -1 на 100 больше, чем карточек с 1. Если для каждой пары различных карточек найти произведение чисел на них, и все эти произведения просуммировать, то получится число 1000. Сколько есть карточек с числом 1?
2. Дан квадратный трёхчлен $f(x)$ с ненулевым коэффициентом при x^2 . Докажите существование такого натурального n , что многочлен $g(x) = f(x) + f(x + 1) + \dots + f(x + n)$ не имеет действительных корней.
3. Докажите, что если у тетраэдра два отрезка, идущие из концов некоторого ребра в центры вписанных окружностей противоположных граней, пересекаются, то отрезки, выпущенные из концов скрещивающегося с ним ребра в центры вписанных окружностей противоположных этим концам граней, также пересекаются.
4. Про натуральные числа n и m известно, что $\sqrt{3} - \frac{m}{n} > 0$. Докажите, что $\sqrt{3} - \frac{m}{n} > \frac{1}{2mn}$.
5. Каждая точка плоскости покрашена либо в синий, либо в красный цвет. Докажите, что найдётся треугольник с вершинами одного цвета и меньшей стороной длины 1, отношение величин углов которого равно $1 : 2 : 4$.

11 класс (Время решения – 4 часа)

1. Дан конечный набор карточек. На каждой из них написано либо число 1, либо число -1 (на каждой карточке ровно одно число), при этом карточек с -1 на 100 больше, чем карточек с 1. Если для каждой пары различных карточек найти произведение чисел на них, и все эти произведения просуммировать, то получится число 1000. Сколько есть карточек с числом 1?
2. Дан квадратный трёхчлен $f(x)$ с ненулевым коэффициентом при x^2 . Докажите существование такого натурального n , что многочлен $g(x) = f(x) + f(x + 1) + \dots + f(x + n)$ не имеет действительных корней.
3. Докажите, что если у тетраэдра два отрезка, идущие из концов некоторого ребра в центры вписанных окружностей противоположных граней, пересекаются, то отрезки, выпущенные из концов скрещивающегося с ним ребра в центры вписанных окружностей противоположных этим концам граней, также пересекаются.
4. Про натуральные числа n и m известно, что $\sqrt{3} - \frac{m}{n} > 0$. Докажите, что $\sqrt{3} - \frac{m}{n} > \frac{1}{2mn}$.
5. Каждая точка плоскости покрашена либо в синий, либо в красный цвет. Докажите, что найдётся треугольник с вершинами одного цвета и меньшей стороной длины 1, отношение величин углов которого равно $1 : 2 : 4$.