

**Муниципальный этап  
Всероссийской олимпиады школьников  
по математике  
2017/18 учебный год  
11 класс**

*Дорогой друг! Желаем успеха!*

**Инструкция для учащихся**

Олимпиада по математике состоит из 6 заданий. На выполнение олимпиады отводится 4 астрономических часа. Каждое задание оценивается в 7 баллов, решение задания необходимо расписать подробно. Задания можно выполнять по своему усмотрению. Если задание не удается выполнить сразу, перейдите к следующему. Если останется время, вернитесь к пропущенным заданиям.

**Калькулятором, справочной литературой пользоваться нельзя!**

**Задания (максимальный балл за всю работу – 42)**

1. Вычислите  $\arctg 1 + \arctg 2 + \arctg 3$ .
2. Существуют ли два последовательных натуральных числа, большие 1 000 000, такие, что суммы их цифр являются точными квадратами?
3. Докажите, что в произведении  $P = 1! \times 2! \times \dots \times 100!$  Можно вычеркнуть один из сомножителей так, чтобы произведение оставшихся было полным квадратом.
4. Пусть  $AM$  – отличная от диаметра хорда окружности с центром в точке  $O$ . На продолжении этой хорды за точку  $M$  отметили точку  $B$ . Точка  $N$  симметрична точке  $M$  относительно прямой  $OB$ . Докажите, что четырёхугольник  $AONB$  можно вписать в окружность.
5. Пусть  $a > 0, b > 0$ . Докажите неравенство  $2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geq 5\sqrt[5]{ab}$ .
6. На заводе работают ровно 217 женщин, среди которых 17 брюнеток, а остальные 200 – блондинки. Перед Новым годом все они покрасили свои волосы, и каждая из этих женщин написала «ВКонтакте» фамилии ровно 200 женщин завода, по её мнению, точно являющихся блондинками. При этом каждая из брюнеток указала верно всех блондинок, а каждая блондинка могла указать на кого угодно, кроме себя. Докажите, что на основании этих данных можно выявить по крайней мере 13 блондинок.