Математика, 10 класс, муниципальный этап

Общие принципы проверки и оценивания олимпиадных работ

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор одного из случаев методом, позволяющим решить задачу в целом, доказательство леммы, используемой в одном из доказательств, нахождение примера или доказательства оценки в задачах типа «оценка + пример» и т.п.). Наконец, возможны как существенные, так и не влияющие на логику рассуждений логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать все вышеперечисленное.

В соответствии со стандартными правилами проведения математических олимпиад школьников ***каждая задача оценивается в целое число баллов от 0 до 7***.

Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Ниже будут приведены критерии к предложенным задачам олимпиады (локальные критерии), содержащие указания к оцениванию (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Такие локальные критерии по отдельным задачам имеют более высокий приоритет по отношению к универсальным критериям: к примеру, если в универсальных критериях за рассмотрение одного из двух случаев сказано, что это оценивается в 4 балла, а в локальных критериях к задаче – что в 2 балла, то баллы выставляются в соответствии с локальными критериями.

Важно отметить, что любое правильное (!) решение оценивается в 7 баллов.

Оценивается только математическая правильность, корректность, полнота решения; баллы не снижаются за «недостаточную» красоту, оптимальность решения, за исправления и помарки (позволяющие прочитать и оценить текст работы. Недопустимо снимать баллы за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Все решения, если не указано противное, требуют обоснования.
Если решения не совпадают с приведенными, читайте внимательно!

Максимально за все задания олимпиады – 35 баллов.

№ задания	1	2	3	4	5	Всего
Баллы	7	7	7	7	7	**35**

Решения, критерии и указания по проверке

1. Решите уравнение: $(x - 2016)(x - 2017)(x - 2018) = (x - 2017)(x - 2018)(x - 2019)$.

<u>Ответ:</u> 2017 и 2018.

Решение:

<u>*Первый способ.*</u>
Перенесем все в левую часть равенства и преобразуем:
$(x - 2016)(x - 2017)(x - 2018) - (x - 2017)(x - 2018)(x - 2019) = 0$
$(x - 2017)(x - 2018) \cdot ((x - 2016) - (x - 2019)) = 0$
$(x - 2017)(x - 2018) \cdot 3 = 0$
Полученное уравнение имеет два корня: 2017 и 2018.

<u>*Второй способ.*</u>
Несложно убедиться, что 2017 и 2018 – корни (при таких значениях аргумента левая и правая часть равенства обращаются в 0). Если $x \neq 2017$ и $x \neq 2018$, то $x - 2017 \neq 0$ и $x - 2018 \neq 0$, поэтому можно поделить на них левую и правую часть, останется $x - 2016 = x - 2019$ – у этого уравнения нет корней (а это значит, что других корней, кроме 2017 и 2018, исходное уравнение не имеет.)

<u>*Третий способ.*</u>
План решения: раскрыть скобки, перенести все в одну часть – получится квадратное уравнение, решить (естественно, этот план должен быть не обозначен, а реализован).

<u>Критерии:</u>
Найдены оба корня, но нет обоснования, почему нет других, – 2 балла.
Найден только один корень, не найдено вовсе или найдены лишние – 0 баллов.
При делении на (x – 2017)(x – 2018) не сказано, почему не делим на 0, – задача не решена.

2. Найдите все решения уравнения: $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$.

<u>Ответ:</u> отрезок $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

Решение:
Найдем область допустимых значений переменной x. Из неотрицательности подкоренных выражений имеем: $2x-1\geq 0$ (то есть $x\geq\frac{1}{2}$) и $x-\sqrt{2x-1}\geq 0$, откуда сразу следует, что $x\geq 0$ (так как уже показали, что $x\geq\frac{1}{2}$), а после переноса корня в другую сторону неравенства и возведения в квадрат получается равносильное неравенство: $x^2\geq 2x-1$, то есть верное неравенство $(x-1)^2\geq 0$. Осталось заметить, что при $x\geq\frac{1}{2}$ неравенство $x+\sqrt{2x-1}\geq 0$ также справедливо. Таким образом, областью допустимых значений являются все $x\geq\frac{1}{2}$. Обе части исходного неравенства неотрицательны, поэтому можно возвести все в квадрат и упростить:

$$x+\sqrt{2x-1}+2\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}+x-\sqrt{2x-1}=2$$
$$2x+2\sqrt{(x+\sqrt{2x-1})(x+\sqrt{2x-1})}=2$$
$$2x+2\sqrt{x^2-(2x-1)}=2$$
$$2x+2\sqrt{(x-1)^2}=2$$
$$x+|x-1|=1$$

Если $\frac{1}{2}\le x<1$, то при раскрытии модуля получаем тождество: $x+(1-x)=1$ (поэтому весь промежуток $\frac{1}{2}\le x<1$ является частью решения). При $x\ge 1$ раскрываем модуль и получаем $x+(x-1)=1$, откуда $x=1$ (тоже включаем в решение).

<u>Критерии:</u>
Верно найдена ОДЗ: 1 балл.
При возведении в квадрат не упомянута неотрицательность сторон равенства: снимаем 1 балл.
Приобретение лишних решений: итоговая оценка не выше 2 баллов (в частности, если получены лишние решения из-за неучтенного ОДЗ – ставить не более 1 балла).
Потеря одного значения из множества решений – снимаем 2 балла, потеря более одного – снимаем 4 балла.

3. Вписанный четырехугольник *ABCD* не имеет параллельных сторон. Лучи *BA* и *CD* пересекаются в точке *E*, а лучи *AD* и *BC* – в точке *F*. Докажите, что если *AE* = *CF*, то *DE* = *DF*.

Решение:

<u>Первый способ.</u>
Пусть $\angle EAD = \alpha$. Тогда $\angle BAD = 180^\circ - \alpha$, а так как *ABCD* – вписанный, то по сумме противоположных углов: $\angle BCD = 180^\circ - \angle BAD = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) = \alpha$, а $\angle FCD = 180^\circ - \alpha$.

По теореме синусов для треугольника *ADE*: $\frac{AE}{\sin\angle EDA}=\frac{DE}{\sin\alpha}$, откуда $DE=\frac{AE\sin\alpha}{\sin\angle EDA}$.

А по теореме синусов для *CFD*: $\frac{CF}{\sin\angle CDF}=\frac{DF}{\sin(180^\circ-\alpha)}$, откуда $DF=\frac{CF\sin(180^\circ-\alpha)}{\sin\angle CDF}=\frac{CF\sin\alpha}{\sin\angle CDF}$.

Но так как *AE* = *CF* (по условию), а $\angle EDA = \angle CDF$ (вертикальные), то $\frac{AE\sin\alpha}{\sin\angle EDA}=\frac{CF\sin\alpha}{\sin\angle CDF}$, откуда *DE* = *DF*.

<u>Второй способ.</u>
На продолжении луча *DA* за точку *A* выберем точку *G* так, что *AG* = *DC*. Так как *AE* – общая, *AG* = *DC* (по построению) и $\angle GAE = 180^\circ - \angle DAE = \angle DCF$ (доказывается так же, как в первом способе), то треугольники *GAE* = *DCF* (по первому признаку), поэтому $\angle AGE = \angle CDF$. Но $\angle CDF = \angle ADE$. Тогда в треугольнике *GDE* два угла ($\angle DGE$ и $\angle GDE$) равны, поэтому он равнобедренный, *GE* = *DE*. Но (из равенства треугольников *GAE* и *DCF*) *GE* = *DF*. Поэтому *DE* = *DF*.

<u>Критерии:</u>
За доказательство промежуточного факта, что $\angle DCF = 180^o - \angle EAD$, – ставить 1 балл.

4. Архипелаг состоит из 2018 островов, между некоторыми из которых ходит катер (каждый катер ходит от одного острова до какого-то другого и обратно), причем от каждого острова катера ходят хотя бы на 6 других островов. Докажите, что можно организовать круговую поездку по островам архипелага, позволяющую посетить не меньше 7 островов.

Решение:

Выберем любой остров архипелага и переедем с него на другой остров, с того острова – еще на другой остров, потом еще на один, – и так далее, пока не получится так, что с очередного острова некуда ехать (все рейсы ведут в ранее посещенные острова). Получили пока такой маршрут: $1 \to 2 \to 3 \to \ldots \to k$. Если у нас получился путь из 6 или меньшего количества островов (то есть $k \le 6$), то уже противоречие – с острова k должно выходить хотя бы 6 рейсов, а в острова 1, 2, …, $k - 1$ выходит не больше 5 рейсов, противоречие. Если получился путь хотя бы из 7 островов (то есть $k \ge 7$), то с острова k, кроме рейсов в предыдущие 5 островов (если даже они все есть), найдется рейс на остров $k - 6$ или остров с еще меньшим номером – но тогда получился путь длиной не менее 7.

<u>Критерии:</u>

Приведен один или несколько примеров, удовлетворяющих условию задачи, и в них показан цикл (круговой маршрут по 7 или более островам), – за это продвижение ставить 0 баллов.
Доказано, что есть цепочка (не цикл) из 7 островов, – 1 балл.
Задача решена в предположении, что из каждого острова выходят ровно 6 рейсов, – 2 балла.

5. Можно ли так раскрасить все натуральные числа в красный и синий цвет, чтобы в любой бесконечной арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, встречались числа двух цветов? (Раскрасить числа – значит присвоить каждому числу один из двух цветов: или красный, или синий.) Обоснуйте свой ответ.

<u>Ответ:</u> можно.

Решение:

Например, можно раскрасить числа так: сначала (на 1 шаге) красим числа 1 – красный цвет, 2 – синий цвет, потом (на 2 шаге) 3 и 4 – красный цвет, 5 и 6 – синий цвет, далее (на 3 шаге) 7, 8, 9 – красный, 10, 11, 12 – в синий, и так далее – на каждом (k-м) шаге красим очередные k подряд идущих чисел в красный цвет, а потом k подряд идущих чисел в синий цвет (более формально: числа от $k(k-1)+1$ до $k(k-1)+k$ – в красный цвет, от $k(k-1)+k+1$ до $k(k-1)+2k$ – в синий цвет).

Докажем, что при такой раскраске никакая арифметическая прогрессия не может состоять из чисел одного цвета. Действительно, пусть d – разность прогрессии. Будем рассматривать только такие члены прогрессии, что все они уже находятся в группах длиной больше d (группой будем называть набор последовательных натуральных чисел, покрашенных в один цвет). Тогда найдутся два последовательных члена прогрессии, находящиеся не в одной группе (потому что в каждой группе только конечное число членов прогрессии). Значит, между этими членами прогрессии целиком находится хотя бы одна группа другого цвета, а ее длина больше d. Тогда получается, что разность между этими соседними членами арифметической прогрессии больше разности прогрессии – противоречие.

<u>Критерии:</u>

Есть верная конструкция, но не обосновано, почему она подходит, – 2 балла.
Ответ без верного обоснования в баллах не оценивается.