МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
2018/2019 УЧЕБНЫЙ ГОД
11 КЛАСС (решения)

1. (*7 баллов*) В первый день Маша собрала на 25 % грибов меньше, чем Вася, а во второй день – на 20 % больше, чем Вася. За два дня Маша собрала грибов на 10 % больше, чем Вася. Какое наименьшее количество грибов они могли собрать вместе?

Решение. Пусть Вася собрал в первый день x грибов, а во второй день – y грибов, тогда Маша собрала $\frac{3}{4}x$ и $\frac{6}{5}y$ грибов соответственно. По условию $\frac{11}{10}(x+y)=\frac{3}{4}x+\frac{6}{5}y$.

Решая это уравнение, получим $22x+22y=15x+24y \Leftrightarrow 7x=2y$. Из условия задачи следует, что числа x и y натуральные, причём x кратно 4, а y кратно 5. Пусть $x=4k$, $y=5n$, где $k\in N$ и $n\in N$. Тогда $28k=10n \Leftrightarrow 14k=5n$. Так как НОД (14;5) = 1, получаем, что k кратно 5, а n кратно 14.

Таким образом, среди всех (k;n), удовлетворяющих полученному равенству, наименьшими являются $k=5$, $n=14$. Следовательно, $x=20$, $y=70$. Общее количество грибов: $\frac{7}{4}x+\frac{11}{5}y=35+154=189$.

Ответ. 189.

2. (*7 баллов*) За круглым столом сидят семь гномов. Перед каждым стоит кружка. В некоторые из этих кружек налито молоко. Один из гномов разливает всё своё молоко в кружки остальных поровну. Затем его сосед справа делает то же самое. Затем то же самое делает следующий сосед справа и т.д. После того, как последний, седьмой гном разлил всем остальным своё молоко, в каждой кружке оказалось столько же молока, сколько в ней было вначале. Во всех кружках вместе 3 литра молока. Сколько молока было первоначально в каждой кружке?

Решение.

Дело в том, что после разливания молока первым гномом (по $\frac{1}{7}$ каждому из остальных) получается точно такое же распределение, но со сдвигом на одного гнома, а сумма (1+2+...+6):7 как раз равна 3. Осталось доказать, что нет других ответов. Пусть x — наибольшее количество молока, оказавшееся за всё время переливаний у какого-либо гнома *Г*. Тогда после очередного цикла из семи «разливаний» (их можно неограниченно продолжать, так что *Г* можно считать первым в цикле) у *Г* накопится не более чем $6\cdot\frac{x}{6}=x$ литров молока; причём равенство возможно, лишь если каждый из шести других гномов наливает в кружку *Г* ровно $\frac{x}{6}$ литров молока. Таким образом, из условия следует, что каждый гном разливает одно и то же количество x молока и после получения k порций у него в кружке налито $\frac{kx}{6}$ литров (k = 1, 2, ..., 6). Зная из условия, что $(x+2x+...+6x):6=\frac{7}{2}x=3$, находим единственный ответ.

Ответ. 6/7, 5/7, 4/7, 3/7, 2/7, 1/7, 0 литров.

3. (*7 баллов*) Пусть $f(x)=x^2+12x+30$. Решите уравнение $f\left(f\left(f\left(f(f(x))\right)\right)\right)=0$.

Решение.

Перепишем выражение для $f(x)$ в виде $(x+6)^2-6$.

Тогда

$$f(f(x))=\left(\underbrace{(x+6)^2-6}_{f(x)}+6\right)^2-6=(x+6)^4-6;$$

$$f(f(f(x)))=\left(\underbrace{(x+6)^4-6}_{f(f(x))}+6\right)^2-6=(x+6)^8-6.$$

Таким образом, имеем:

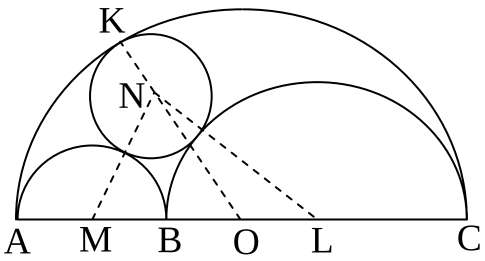
$$f\left(f\left(f\left(f(f(x))\right)\right)\right)=(x+6)^{32}-6.$$

Значит, исходное уравнение равносильно уравнению $(x+6)^{32}-6=0$, откуда $x=-6\pm\sqrt[32]{6}$.

Ответ. $x=-6\pm\sqrt[32]{6}$.

4. (*7 баллов*) Точка B принадлежит отрезку AC, причём $AB=14$, $BC=28$. На отрезках AB, BC, AC как на диаметрах построены в одной полуплоскости полуокружности. Найдите радиус окружности, касающейся всех трёх полуокружностей.

Решение.



1. Обозначим через N центр окружности, касающейся всех трех полуокружностей, через K – точку касания с полуокружностью, построенной на AC, через M, L и O – середины отрезков AB, BC, AC.
2. Пусть искомый радиус $NK = x$, тогда
   $MN = 7 + x$, $NL = 14 + x$, $ON = 21 - x$, $ML = 21$, $OM = 14$.
3. В треугольнике MNO по теореме косинусов получим:
   $$ON^2 = OM^2 + MN^2 - 2OM \cdot MN \cdot cos\angle M.$$
   Выразим $cos\angle M$ и подставим значения:
   $$cos\angle M = \frac{(21-x)^2 - 14^2 - (7+x)^2}{2 \cdot 14 \cdot (7+x)},$$
   $$cos\angle M = \frac{2x-7}{7+x}.$$
4. В треугольнике MNL: $NL^2 = MN^2 + ML^2 - 2MN \cdot ML \cdot cos\angle M$.
   $$cos\angle M = \frac{(14+x)^2-(7+x)^2-21^2}{2\cdot(7+x)\cdot 21},$$
   $$cos\angle M = \frac{21-x}{3(7+x)}.$$
   Так как в треугольниках MNO и MNL угол M общий, то
   $\frac{2x-7}{7+x} = \frac{21-x}{3(7+x)}$, отсюда $x = 6$.
   Таким образом, радиус искомой окружности равен 6.

Ответ. 6.

5. (*7 баллов*) Решите уравнение $(\sin x)^{2018} + (\cos x)^{2018} = 1$.

Решение.

Так как $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, то получим уравнение:
$$(\sin x)^{2018} + (\cos x)^{2018} = \sin^2 x + \cos^2 x,$$
откуда имеем:
$$\sin^2 x(1 - \sin^{2016} x) + \cos^2 x(1 - \cos^{2016} x) = 0.$$
Так как $|\sin x| \le 1, |\cos x| \le 1$, то равенство выполняется только в том случае, когда оба слагаемые равны 0. Поэтому уравнение равносильно системе уравнений:
$$\begin{cases} \sin^2 x(1 - \sin^{2016} x) = 0, \\ \cos^2 x(1 - \cos^{2016} x) = 0. \end{cases}$$

Решением данной системы является

$$x = \frac{\pi n}{2}, \ \ n \epsilon Z.$$

Ответ. $x = \frac{\pi n}{2}, \ \ n \epsilon Z.$