МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

2018-2019 УЧЕБНЫЙ ГОД

11 КЛАСС

Максимальный балл: 35 баллов (по 7 баллов за каждое задание)

РЕШЕНИЯ

1. Пусть $t=\log_{x^{2019}}2018$, тогда уравнение примет вид: $t+t^2+t^3+\ldots=2018$.
Упростим левую часть последнего уравнения, используя формулу суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии, получим: $\frac{t}{1-t}=2018$.

Откуда $t=\frac{2018}{2019}$.

Получим, $\log_{x^{2019}}2018=\frac{2018}{2019}$, $\left(x^{2019}\right)^{\frac{2018}{2019}}=2018$, $x=\sqrt[2018]{2018}$.

Ответ: $\sqrt[2018]{2018}$.

2. Разобьём все числа 1, 2, …, 2018 на пары вида k и $2019-k$. Найдём остаток от деления числа $(2019-k)^{12}+2018$ на 2019, получим:

$$(2019-k)^{12}+2018=$$
$$=2019^{12}+12\cdot2019^{11}\cdot(-k)+\ldots+12\cdot2019\cdot(-k)^{11}+(-k)^{12}+2018\equiv$$
$$\equiv(-k)^{12}+2018=k^{12}+2018(\mathrm{mod}\,2019).$$

Таким образом, остатки от деления на 2019 в каждой паре совпадают. Значит, количество новогодних чисел чётно.

Примечание. Указание отдельных пар новогодних чисел – 2 балла. Если перебором получены все 24 числа: 1, 16, 58, 256, 418, 631, 674, 689, 715, 731, 928, 929, 1090, 1091, 1288, 1304, 1330, 1345, 1388, 1601, 1763, 1961, 2003, 2018 – 7 баллов.

Ответ: количество новогодних чисел чётно.

3. Пусть $\alpha=\arccos x$, тогда $x=\cos\alpha$. Преобразуем левую часть неравенства, получим:

$$\left|2x\cos(2019\arccos x)-\cos(2018\arccos x)\right|=\left|2\cos\alpha\cos2019\alpha-\cos2018\alpha\right|=$$
$$=\left|2\cdot(\cos(\alpha+2019\alpha)+\cos(\alpha-2019\alpha))-\cos2018\alpha\right|=\left|\cos2020\alpha\right|\le1.$$

4. Пусть A, B, C – центры данных окружностей, $AB=2$, $AC=2$, $BC=3$ (см. рис. 1).

Обозначим через a, b и c радиусы окружностей с центрами в точках A, B и C соответственно и найдём их значения, решив систему уравнений. Получим:

$$\begin{cases} a+b=2, \\ a+c=2, \\ b+c=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2}, \\ b=\frac{3}{2}, \\ c=\frac{3}{2}. \end{cases}$$

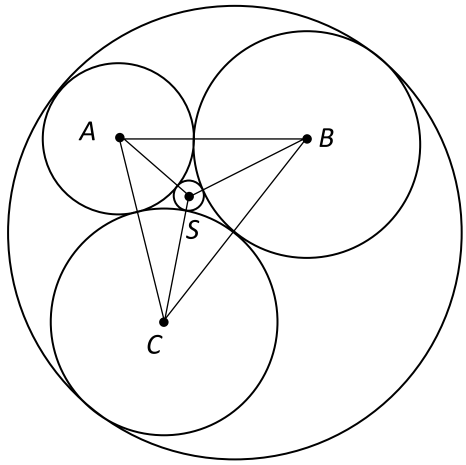

Рис. 1

Пусть S и L – центры малой и большой окружностей соответственно.

Обозначим через r и R радиусы малой и большой окружностей, касающихся трёх данных, соответственно.

Пусть $\angle ASB = 2\gamma$, $\angle ASC = 2\gamma$ и $\angle BSC = 2\alpha$. Тогда по теореме косинусов для треугольника ASB, получим:

$$\cos 2\gamma = \frac{(a+r)^2+(b+r)^2-(a+b)^2}{2(a+r)(b+r)} = \frac{r^2+(a+b)r-ab}{(a+r)(b+r)}.$$

Откуда, используя формулы двойного угла, найдем:

$$\cos^2\gamma = \frac{r(a+b+r)}{(a+r)(b+r)},\ \sin^2\gamma = \frac{ab}{(a+r)(b+r)}.$$

Аналогично для треугольника BSC, получим:

$$\sin^2\alpha = \frac{b^2}{(b+r)^2}.$$

Так как $\alpha + 2\gamma = \pi$, то $\sin^2\alpha = \sin^2 2\gamma = 4\sin^2\gamma\cos^2\gamma$.

Откуда,

$$\frac{b^2}{(b+r)^2} = 4\cdot\frac{ab}{(a+r)(b+r)}\cdot\frac{r(a+b+r)}{(a+r)(b+r)},$$

$$b^2(a+r)^2 = 4ab(a+b+r),$$

$$(b-4a)r^2+(2ab^2-4a^2-4ab)r+a^2b=0.$$

Подставив найденный значения радиусов исходных окружностей, получим уравнение для определения значения r:

$$r^2+5r-\frac{3}{4}=0,$$

$$r=\frac{1}{2}\left(2\sqrt{7}-5\right).$$

Заметим, что для нахождения значения радиуса большой окружности R во всех равенствах для нахождения радиуса малой окружности можно заменить r на $-R$. Тогда получим уравнение:

$$R^2-5R-\frac{3}{4}=0,$$

$$R=\frac{1}{2}\left(2\sqrt{7}+5\right).$$

Найдем площадь искомой фигуры, получим: $S=\pi R^2-\pi r^2=10\sqrt{7}\pi$.
Примечание. Найдены радиусы исходных окружностей – 1 балл. Найден радиус одной из окружностей – 4 балла.
Ответ: $10\sqrt{7}\pi$.

5. Рассмотрим отдельно одну установку и определим выигрышную стратегию для неё, исходя из количества оставшихся открытых мишеней после хода игрока, получим следующую таблицу.

Количество открытых мишеней	0	1	2	3	4	5
Характер позиции игрока	В	П	П	В	П	П

Здесь: В – выигрышная позиция, П – проигрышная позиция.
Из приведенной таблицы видно, что для отдельной установки ход игрока, состоящий в том, чтобы произвести 1, 2 или 4 выстрела, эквивалентен ходу игрока, состоящему в том, чтобы произвести 1 или 2 выстрела, так как характер позиций игрока разбит на повторяющиеся группы по 3 элемента (В, П, П).
Рассмотрим все три установки. Пусть M_1, M_2 и M_3 – количество открытых мишеней на каждой из установок. Найдем остатки m_1, m_2 и m_3 от деления чисел M_1, M_2 и M_3 на 3 соответственно и запишем их в двоичной системе, добавляя по необходимости слева цифру 0. Получим, что начальная позиция в игре будет иметь вид:

m_1	1	0
m_2	1	0
m_3	1	0
Σ	3	0

При этом конечная позиция, соответствующая закрытию последней мишени, имеет вид:

m_1	0	0
m_2	0	0
m_3	0	0
Σ	0	0

Заметим, что переход от начальной позиции к конечной приводит к изменению чётности сумм единиц в столбцах. Поэтому выиграет тот игрок, после хода которого указанные суммы будут чётными. При этом, если данные суммы являются чётными, то очередной ход игрока приводит к изменению их чётности, так как остатки от деления чисел 1, 2 и 4 при делении на 3 равны 1 и 2, и отличны от нуля.

Значит, выиграет Антон. Для этого он своим первым ходом должен сделать два выстрела по любой установке (например, первой), т.е. получить позицию:

m_1	0	0
m_2	1	0
m_3	1	0
Σ	2	0

А затем делать выстрелы по установкам так, чтобы суммы единиц в столбцах становились чётными после его хода.

Примечание. Если указана одна из возможных предпоследних позиций без указания первого хода Антона – 1 балл. Обоснованно, верно, указан первый ход Антона – 2 балла. Показано, что 1 выстрел эквивалентен 4 выстрелам, так как остатки от деления на 3 равны – 2 балла.

Замечание. Игра может быть решена анализом выигрышных позиций в кубе $6 \times 6 \times 6$, в котором ходы игроков эквивалентны перемещениям параллельно граням куба.

Ответ: выигрывает Антон.