Муниципальный этап
Всероссийской олимпиады школьников
по математике
в 2018 – 2019 учебном году

Ответы и решения

Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серъёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

4) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

5) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

6) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказательств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

7) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а

жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено.

8) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

9) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий: д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. +**79220350324**).

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2018 – 2019 учебном году
11 класс

Время выполнения заданий — 4 часа

11.1. *Цену на товар сначала подняли на x процентов, а потом опустили на y процентов. В результате цена осталась прежней. Найдите все значения, которые может принимать разность $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$.*

Решение: Пусть товар стоил 1 денежную единицу. Тогда после поднятия цены его стоимость стала $a = 1 + \dfrac{x}{100}$, а после снижения она стала

$$a - \frac{ay}{100} = a\left(1 - \frac{y}{100}\right) = \left(1 + \frac{x}{100}\right)\left(1 - \frac{y}{100}\right).$$

Условие задачи, следовательно, описывается уравнением

$$\left(1 + \frac{x}{100}\right)\left(1 - \frac{y}{100}\right) = 1.$$

Отсюда $(100 + x)(100 - y) = 10000$ или $100x - 100y = xy$. Выражение $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$ тогда равно $\dfrac{y - x}{xy} = -\dfrac{1}{100}$.

Примечание: Можно, конечно, положить начальную цену товара равную любому другому неотрицательному числу или обозначить неизвестной. В последнем случае неизвестная в уравнении сократится.

Ответ: $-\dfrac{1}{100}$.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения ответ неверен из-за арифметической ошибки	6 баллов
Ответ без обоснования и/или неверный ответ	0 баллов

11.2. *Сумму $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dots + \dfrac{1}{p-1}$, где p — нечётное простое число, представили в виде несократимой обыкновенной дроби. Докажите, что числитель этой дроби делится на число p без остатка.*

Решение: Разобьём слагаемые на пары: первое — с последним, второе — с предпоследним и т. д. (Это возможно, так как слагаемых чётное количество). Сумма дробей в каждой паре равна

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{p-t}=\frac{p}{t(p-t)}$$

для некоторого $t<\frac{p}{2}$. Тогда вся сумма равна

$$p\cdot\left(\frac{1}{1(p-1)}+\frac{1}{2(p-2)}+\dots+\frac{1}{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p+1}{2}}\right).$$

При приведении дробей в скобке к общему знаменателю все множители произведения, стоящего в знаменателе, будут меньше, чем p, поэтому множитель p перед скобкой (в силу простоты числа p) при дальнейших преобразованиях не сократится. Это гарантирует делимость числителя полученной дроби на p.

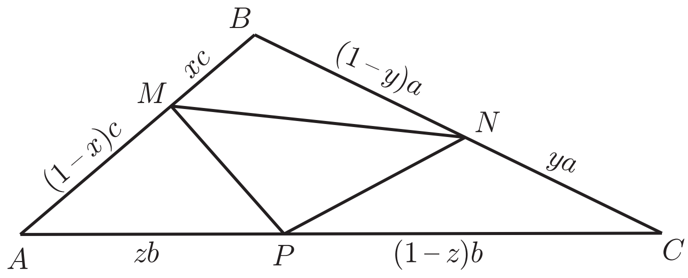
Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное доказательство	7 баллов
Получено, что при приведении к общему знаменателю числитель будет делиться на p, но не доказано, что при сокращениях p из числителя «не исчезнет»	5 баллов
Идея сгруппировать слагаемые попарно: меньшее с большим имеется, но к решению не привела	2 балла
Утверждение задачи проверено для нескольких простых чисел p (например, для всех двузначных), а также всевозможные выкладки и рассуждения, из которых ход доказательства не просматривается	0 баллов

11.3. *На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC отметили точки M, N и P соответственно. Оказалось, что площади всех четырёх треугольников BMN, CNP, APM и MNP равны. Верно ли, что точки M, N и P обязаны быть серединами соответствующих сторон треугольника? Ответ обоснуйте.*

Решение: Обозначим стороны треугольника через $a=BC$, $b=AC$ и $c=AB$. Тогда для некоторых чисел x, y, z из отрезка $[0;\,1]$ выполняются соотношения $BM=xc$, $MA=(1-x)c$, $AP=zb$, $PC=(1-z)b$, $CN=ya$, $NB=(1-y)a$ — см. рисунок.

По условию $S_{MBN}=\frac{1}{4}S_{ABC}$. Так как $\frac{S_{MBN}}{S_{ABC}}=\frac{MB\cdot NB}{AB\cdot CB}$, отсюда следует, что $4x(1-y)=1$. Аналогично получаются равенства $4y(1-z)=1$ и $4z(1-x)=1$.



К решению задачи 11.3

Остаётся решить систему трёх полученных уравнений. Это можно сделать по-разному, например, так. Сделаем замену $x = \sin^2\alpha$, $y = \sin^2\beta$, $x = \sin^2\gamma$ для некоторых чисел α, β, γ из отрезка $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$. (Это допустимая замена, так как x, y, $z \in [0;\ 1]$). Тогда система примет вид

$$\begin{cases} 4\sin^2\alpha\cos^2\beta & = & 1, \\ 4\sin^2\beta\cos^2\gamma & = & 1, \\ 4\sin^2\gamma\cos^2\alpha & = & 1. \end{cases}$$

Перемножим левые и правые части всех трёх уравнений и, используя формулу синуса двойного угла, получим равенство $\sin^2 2\alpha \cdot \sin^2 2\beta \cdot \sin^2 2\gamma = 1$. Так как каждый из множителей не превосходит единицы, то отсюда следует равенство $\sin^2 2\alpha = \sin^2 2\beta = \sin^2 2\gamma = 1$. Учитывая, что числа α, β, γ лежат в отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$, получаем равенство $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{4}$. А тогда $x = y = z = \frac{1}{2}$, что означает: точки M, N, P являются серединами сторон треугольника ABC.

Ответ: Обязаны.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
В верном по сути решении имеются арифметические ошибки (возможно, приведшие к неверному ответу)	6 баллов
Доказано, что точки M, N, P делят стороны AB, BC и CA в одном и том же отношении, но решение не завершено	4 балла
Задача верно решена при допущении, что точки M, N, P делят стороны в одном и том же отношении	3 балла
Задача верно сведена к системе алгебраических уравнений, но система не решена (или решена неверно)	2 балла
Задача верно решена в некоторых частных случаях (например, в случае правильного треугольника)	1 балл
Ответ без обоснования, неверный ответ, а также проверка, что точки M, N, P могут быть серединами сторон	0 баллов

11.4. *Дана функция $f(x) = (1-x^3)^{-1/3}$. Найдите $f(f(f\ldots f(2018)\ldots))$ (функция f применена 2019 раз)*

Решение: Проведём равносильные (при $x \neq 1$ и $x \neq 0$) преобразования:

$$f(f(x)) = (1 - f(x)^3)^{-1/3} = (1 - (1 - x^3)^{-1})^{-1/3} = \left(1 - \frac{1}{1 - x^3}\right)^{-1/3} =$$

$$= \left(\frac{-x^3}{1 - x^3}\right)^{-1/3} = \frac{-x^{-1}}{(1 - x^3)^{-1/3}} = -\frac{(1 - x^3)^{1/3}}{x};$$

$$f(f(f(x))) = f\left(-\frac{(1 - x^3)^{1/3}}{x}\right) = \left(1 + \frac{1 - x^3}{x^3}\right)^{-1/3} = \left(\frac{1}{x^3}\right)^{-1/3} = x.$$

Таким образом, троекратное применение функции не изменяет значение переменной. Так как 2019 кратно трём, применение функции 2019 раз также не изменит этого значения.

Ответ: 2018.

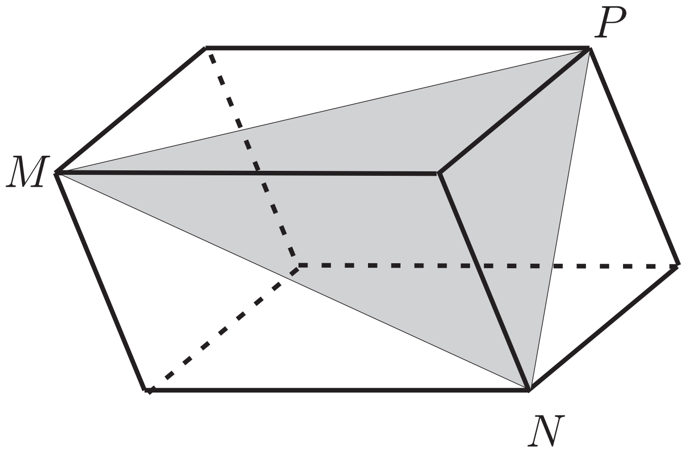
Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
Обнаружена периодичность операции применения функции с шагом 3; вывод из этого не сделан, или сделан неверный	5 баллов
Верно найдено только $f(f(x))$	2 балла
Ответ без обоснования и/или неверный ответ	0 баллов

11.5. *Прямоугольный параллелепипед с длинами рёбер $\sqrt{70}, \sqrt{99}, \sqrt{126}$ ортогонально проектируют на всевозможные плоскости. Найдите наибольшее значение площади проекции. Ответ обоснуйте.*

Решение: Проекция представляет собой шестиугольник с попарно параллельными сторонами (возможно, некоторые углы вырождены). Он разбивается на три параллелограмма, поэтому его площадь есть удвоенная площадь треугольника MNP — смотреть рисунок.

Эта площадь — площадь проекции треугольника — максимальна тогда, когда проекция производится перпендикулярно проецируемому треугольнику. В этом случае треугольник равен своей проекции, и площадь проекции, следовательно, равна площади самого треугольника. Длины сторон треугольника легко находятся по теореме Пифагора: $\sqrt{70+99} = 13$, $\sqrt{70+126} = 14$ и $\sqrt{99+126} = 15$. Остаётся найти площадь треугольника со сторонами 13, 14, 15. По формуле Герона она равна $\sqrt{21 \cdot (21-13) \cdot (21-14) \cdot (21-15)} = 84$. Тогда максимальная площадь



К решению задачи 11.5

проекции равна 168.

Ответ: 168.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
Арифметические ошибки в решении (возможно, ведущие к неверному ответу)	снять 1 балл
Имеется недоказанное утверждение о связи площади треугольника MNP с максимальной площадью проекции; с учётом этого задача решена.	5 баллов
Неверно (по неверным формулам) найдены длины отрезков или площади фигур; при этом все шаги решения выполнены и получено численное значение площади проекции (возможно, неверное)	3 балла
Верно найдены диагонали всех граней параллелепипеда (или иные параметры треугольника MNP, позволяющие найти его площадь)	2 балла
Ответ без обоснования и/или неверный ответ	0 баллов

11.6. *В однокруговом шахматном турнире (каждый шахматист играет с каждым одну партию) участвовало* 20 *шахматистов, причём* 6 *из них — из России. Известно, что набрав очков больше, чем кто-либо, первое место занял россиянин Владимир. Второе место занял Левон из Армении, также опередив по очкам каждого из остальных* 18 *шахматистов. Какое наибольшее суммарное количество очков могли набрать российские шахматисты? (В шахматах за победу в партии даётся одно очко, за ничью — пол-очка, за поражение очков не дают.)*

Решение: Приведем пример, показывающий, что суммарно российские шахматисты могли набрать 96 очков. Пусть Владимир выиграл все свои партии, кроме партии с Левоном, которая завершилась вничью. Пусть, кроме того, Левон сыграл вничью и со всеми остальными россиянами, а у не россиян неизменно выигрывал. Наконец, пусть все остальные партии между россиянами завершились вничью, а иностранцев, кроме Левона, все россияне победили. Тогда Владимир набрал $18 \cdot 1 + 1 \cdot 0{,}5 = 18{,}5$ очков, Левон набрал $13 \cdot 1 + 6 \cdot 0{,}5 = 16$ очков, каждый из остальных россиян набрал $13 \cdot 1 + 5 \cdot 0{,}5 = 15{,}5$ очков, а каждый из остальных тринадцати игроков — не более, чем 12 очков. Условие задачи в этом случае выполнено, а количество очков набранных всеми россиянами равно $18{,}5 + 5 \cdot 15{,}5 = 96$.

Покажем, методом от противного, что больше очков россияне набрать не могут. Пусть они в сумме набрали 96,5 очков или больше. В 15-и партиях между собой они взяли в сумме 15 очков, а остальные (не менее 81,5) взяты в партиях с представителями других стран. Таких партий россиянин — не россиянин было $6 \cdot 14 = 84$, и в них разыгрывалось всего 84 очка. Тогда все иностранцы в партиях с россиянами набрали не более 2,5 очков, и никто из них, в том числе Левон, не мог набрать в сумме более, чем $13 + 2{,}5 = 15{,}5$ очков. Пятеро россиян, которых он опередил, набрали при этом не более 15 очков каждый, а тогда Владимир должен набрать не менее $96{,}5 - 15 \cdot 5 = 21{,}5$ очка. Но он сыграл всего 19 партий, и потому набрать более 19 очков не мог. Противоречие.

Ответ: 96 очков.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
Доказано, что 96,5 очков и более россияне в сумме набрать не могут, но нет примера на 96 очков	4 балла
Приведён верный пример, когда россияне в сумме набрали 96 очков; при этом не доказано, что большего количества очков они набрать не могли.	2 балла
Верный ответ без обоснования (с неверным обоснованием)	1 балл
Неверный ответ и/или рассуждения, не приведшие к ответу или точной оценке	0 баллов