Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике

2018/19 учебный год

11 класс

Ответы и решения задач

1. УСЛОВИЕ

Известно, что $a^2 + ab + b^2 = 1$. Докажите, что $a^3 + b = b^3 + a$.

Доказательство. $a^2 + b^2 = 1 – ab$, следовательно, $a^2 + ab + b^2 = 1$. Умножим обе части равенства на число $(a – b)$. Получим $(a – b)(a^2 + ab + b^2) = a – b$, следовательно, $a^3 – b^3 = a – b$, следовательно, $a^3 + b = b^3 + a$.

2. УСЛОВИЕ

«Как-то во время игры в шахматы у меня осталось фигур и пешек в 3 раза меньше, чем у соперника, и в 6 раз меньше, чем свободных клеток на доске, но я все равно выиграл эту партию!» – рассказывал однажды Иван Иванов. Стоит ли ему верить?

Решение. Допустим, у Ивана осталось n пешек и фигур. Если верить Ивану, в этот момент у его соперника пешек и фигур было $3n$, а пустых клеток на доске – $6n$. Но тогда получается, что всего на доске $n + 3n + 6n = 10n$ клеток, а на самом деле их там 64 – на 10 не делится.

Ответ. Не стоит.

3. УСЛОВИЕ

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Прямая l проходит через точку E, середину ребра C_1D_1, и пересекает прямые AD_1 и A_1B. Найдите расстояние от точки E до точки пересечения прямой l с прямой A_1B.

Решение. Рассмотрим плоскость AD_1C_1B. Т.к. прямая l проходит через середину ребра C_1D_1 и пересекает прямую AD_1, она имеет с этой плоскостью две общие точки, а значит, целиком принадлежит этой плоскости. В то же время прямая A_1B лежит в плоскости ABA_1B_1. Поэтому точка пересечения прямых l и A_1B лежит на линии пересечения плоскостей AD_1C_1B и ABA_1B_1, т.е. на прямой AB. Но в то же время она принадлежит прямой A_1B, а значит, совпадает с точкой пересечения прямых l и A_1B, т.е. с точкой B. Итак, мы должны найти расстояние между точками E и B. По теореме Пифагора: $BE = \sqrt{1+1+1/4} = 1{,}5$.

Ответ. 1,5.

4. УСЛОВИЕ

Два двузначных числа, записанных одно за другим, образуют четырехзначное число, которое делится на их произведение. Найти эти числа.

Решение. Пусть a и b – два двузначных числа, тогда $100a + b$ – четырехзначное число. По условию $100a + b = k \cdot ab$, отсюда $b = a(kb - 100)$, т.е. b делится на a. Итак, $b = ma$, но a и b двузначны, поэтому m однозначно. Т.к. $100a + b = 100a + ma = a(100 + m)$ и $100a + b = kab$, то $a(100 + m) = kab$, т.е. $100 + m = kb$ или $100 + m = kma$, откуда $100 = m(ka - 1)$. Итак, m – делитель числа 100, кроме того, m однозначно, значит, $m = 1, 2, 4, 5$.

Т.к. $ka - 1 = 100/m$, или $ka = 100/m + 1$, причем a двузначно, то отпадают для m значения 1 и 5, ибо $100/1 + 1$ не делится ни на какое двузначное число a; при $100/5 + 1 = 21$ имеем $a = 21$ и тогда $b = m{\cdot}a = 5{\cdot}21$ трехзначно.
При $m = 2$, $ka = 51$, $a = 17$, $b = 34$; при $m = 4$, $ka = 26$, $a = 13$, $b = 52$.

Ответ. 17 и 34; 13 и 52.

5. УСЛОВИЕ

Сосновый лес растет на участке, имеющем форму квадрата со стороной 1 км. Зная, что весь этот лес состоит из 4500 деревьев диаметра 50 см, доказать, что в лесу можно выбрать прямоугольную площадку 10 м × 20 м, на которой не растет ни одно дерево.

Доказательство. Разобьем участок на прямоугольники размером 10 м × 20 м и на полосы между ними: на одной стороне участка отложим 48 отрезков длиной в 20 м каждый, причем между соседними отрезками оставим промежуток в 0,6 м, и два крайних отрезка по 5,9 м каждый. На второй стороне квадрата отложим 95 отрезков длины 10 м каждый, разделенных промежутками длины, большей 0,5 м каждый. Тогда на участке окажется $48{\cdot}95 = 4560$ прямоугольников, разделенных полосами, шириной, большей 0,5. Т.к. деревьев всего 4500 и ни одно из них не может попасть больше чем в один прямоугольник, то найдутся прямоугольники (даже не меньше 60), на которых нет деревьев.

6. УСЛОВИЕ

Можно ли нарисовать на плоскости 2005 ненулевых векторов так, что из любых десяти из них можно выбрать три с нулевой суммой?

Решение. Предположим, что мы смогли нарисовать на плоскости 2005 ненулевых векторов так, что из любых 10 из них можно выбрать 3 с нулевой суммой. Выберем прямую, которая не перпендикулярна ни одному из нарисованных 2005 векторов. Рассмотрим проекции нарисованных векторов на выбранную прямую. Ни одна из этих проекций не равна нулевому вектору. При этом по крайней мере 1003 проекции направлены в одну сторону. Выберем 10 векторов, проекции которых направлены в одну сторону. Тогда проекции любых трех из них направлены в одну сторону, и поэтому их сумма не равна нулю. (Т.к. если сумма векторов равна нулю, то и сумма проекций этих векторов на прямую также равна нулю).

Ответ. Нельзя.