Математика, 11 класс, муниципальный этап

Общие принципы проверки и оценивания олимпиадных работ

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор одного из случаев методом, позволяющим решить задачу в целом, доказательство леммы, используемой в одном из доказательств, нахождение примера или доказательства оценки в задачах типа «оценка + пример» и т.п.). Наконец, возможны как существенные, так и не влияющие на логику рассуждений логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать все вышеперечисленное.

В соответствии со стандартными правилами проведения математических олимпиад школьников ***каждая задача оценивается в целое число баллов от 0 до 7***.

Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Ниже будут приведены критерии к предложенным задачам олимпиады (локальные критерии), содержащие указания к оцениванию (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Такие локальные критерии по отдельным задачам имеют более высокий приоритет по отношению к универсальным критериям: к примеру, если в универсальных критериях за рассмотрение одного из двух случаев сказано, что это оценивается в 4 балла, а в локальных критериях к задаче – что в 2 балла, то баллы выставляются в соответствии с локальными критериями.

Важно отметить, что любое правильное (!) решение оценивается в 7 баллов.

Оценивается только математическая правильность, корректность, полнота решения; баллы не снижаются за «недостаточную» красоту, оптимальность решения, за исправления и помарки (позволяющие прочитать и оценить текст работы. Недопустимо снимать баллы за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Все решения, если не указано противное, требуют обоснования.
Если решения не совпадают с приведенными, читайте внимательно!

Максимально за все задания олимпиады – 35 баллов.

№ задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**Всего**
Баллы	7	7	7	7	7	**35**

Решения, критерии и указания по проверке

1. Решите уравнение: $\cos^2 x+\cos^2 2x=1$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$ (при целых k).

Решение:

Так как $\cos 2x=2\cos^2 x-1$, то заменой $y=\cos^2 x$ уравнение сводится к $y+(2y-1)^2=1$. Раскрывая скобки и упрощая, получаем $4y^2-3y=0$, откуда $y=0$ или $y=\frac{3}{4}$.

Первое из этих значений приводит к $\cos^2 x=0 \Leftrightarrow \cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ (при целых k).

Из второго значения получаем $\cos^2 x=\frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k$ или $x=\pm\frac{2\pi}{6}+2\pi k$ (при целых k).

Отметим, что две серии корней можно собрать вместе в виде $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$ (при целых k), но это не особо принципиально.

Критерии:

Найдено полное решение (все серии) – 2 балла, потерян период – 1 балл.
Уравнение сведено к квадратному или биквадратному – плюс 1 балл.

2. На координатной плоскости xOy изобразите множество точек (x, y), для которых выполняется неравенство: $\sqrt{xy}\ge x-2y$. Объясните, почему множество точек именно такое.

Решение:

Подкоренное выражение должно быть неотрицательно $(xy\ge 0)$, поэтому x и y одного знака (или одно из них равно 0). Это значит, что множество точек будет располагаться в I и III координатных четвертях. Для таких значений переменных неравенство заведомо будет выполняться, если правая часть неположительна (при $x-2y\le 0$, то есть при $y\ge\frac{x}{2}$). Если же правая часть неравенства положительна, то неравенство равносильно такому: $xy\ge(x-2y)^2$. Раскроем скобки, преобразуем к равносильному неравенству: $xy\ge x^2-4xy+4y^2$, то есть $x^2-5xy+4y^2\le 0$. Дальше можно действовать разными способами.

Первый способ.

Разложим на множители:
$x^2-5xy+4y^2=x^2-xy+4y^2-4xy=x(x-y)+4y(y-x)=(x-y)(x-4y)$, поэтому неравенство равносильно $(x-y)(x-4y)\le 0$, что в свою очередь равносильно совокупности:

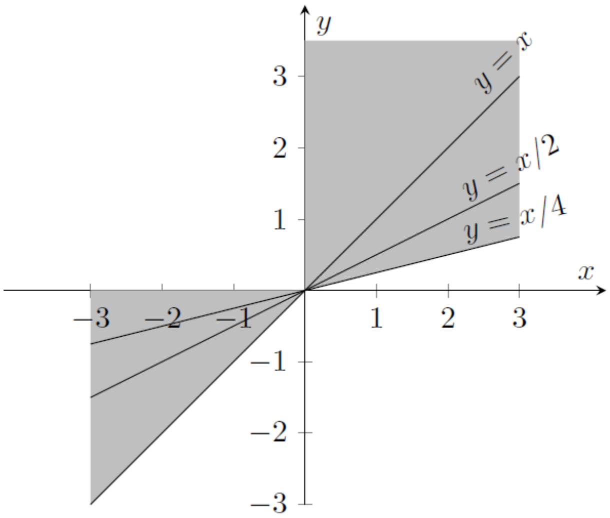
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-y\ge 0,\\ x-4y\le 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x-y\le 0,\\ x-4y\ge 0.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y\le x,\\ y\ge x/4,\end{cases}\\ \begin{cases}y\ge x,\\ y\le x/4,\end{cases}\end{array}\right.$$

<u>Второй способ.</u>

Если $y = 0$, то неравенство справедливо только при $x = 0$. При $y \neq 0$ разделим все на положительное y^2, получим неравенство: $\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 5\frac{x}{y} + 4 \le 0$. Заменой $t = \frac{x}{y}$ это сводится к квадратному неравенству $t^2 - 5t + 4 \le 0$, решением которого является $1 \le t \le 4$, то есть $1 \le \frac{x}{y} \le 4$. При $y > 0$ это равносильно $y \le x \le 4y$ (или, иначе, системе: ${}^{x}\!/\!_{4} \ge y \ge x$). При $y < 0$ это равносильно $y \ge x \ge 4y$ (или, иначе, системе: ${}^{x}\!/\!_{4} \ge y \ge x$).

Так или иначе, дополнительно к области над графиком $y \ge \frac{x}{2}$ в первой и третьей координатных четвертях закрашиваем области, соответствующие неравенству $x^2 - 5xy + 4y^2 \le 0$ (описаны выше).

Получаем:



<u>Критерии:</u>

Потерян разбор ситуации, когда правая часть неравенства отрицательна, – ставить не более 2 баллов (если все остальное верно).

Получены лишние области из-за нерассмотренной ОДЗ – ставить не более 2 баллов (если все остальное верно).

3. Треугольник ABC – равносторонний. На стороне AC отметили точку M, а на стороне BC – точку N, причем $MC = BN = 2AM$. Отрезки MB и AN пересекаются в точке Q. Найдите угол CQB.

Ответ: 90^o.

Решение:

Так как $MC = BN$ и $AC = BC$, то $AM = AC – MC = BC – BN = NC$.

Из того, что $AM = NC$, $AB = AC$ и $\angle BAM = \angle CAN = 60^o$ следует, что треугольники BAM и ACN равны, поэтому $\angle NAC = \angle MBA = \alpha$.

Из треугольника ABM: $\angle AMB$ *(и он же* $\angle AMQ$*)* $= 180^o – 60^o – \alpha = 120^o – \alpha$.

А из треугольника AQM: $\angle AQM = 180^o – \angle AMQ – \alpha = 180^o – (120^o – \alpha) – \alpha = 60^o$.

Тогда $\angle MQN = 120^o$, поэтому $\angle MQN + \angle MCN = 180^o$ – отсюда следует, что четырехугольник $MQNC$ вписанный.

Но тогда $\angle NQC = \angle NMC$.

В треугольнике NMC сторона NC в два раза меньше стороны MC, а угол между ними равен 60^o, поэтому этот треугольник – прямоугольный с углами 90^o, 60^o, 30^o. Из этой же вписанности: $\angle MQC = \angle MNC = 90^o$, тогда $\angle CQB$ тоже прямой.

Критерии:

Доказано, что $\angle MQN = 120^o$ *или* $\angle AQM = 60^o$ *– ставить 2 балла.*

Если это не доказано, а используется, за решение ставить не более 3 баллов.

Аналогично с равенством $\angle MQC = 90^o$ *(доказано – ставить 2 балла, не доказано – за решение не выше 3 баллов).*

4. В математическом кружке занимается 6 школьников, у каждого из которых не меньше 3 друзей в этом кружке (дружба взаимная). Если кому-то досталась книга, то он читает ее, а потом отдает ее одному из своих друзей, кто еще не читал этой книги. Докажите, что учитель может отдать новую книгу одному из школьников, чтобы она потом по цепочке побывала у всех участников кружка.

Решение:

Первый способ.

Будем строить цепочку друзей. Возьмем одного школьника (далее будем называть его школьником № 1), выберем любого из его друзей (обозначим его № 2), теперь выберем какого-то друга школьника № 2, но не № 1 (это можно сделать, так как у школьника № 2 хотя бы три друга), – это школьник № 3. Для школьника № 3 рассмотрим его друга, но не № 1 и не № 2 (это тоже можно сделать, так как у школьника № 2 хотя бы три друга), – это школьник № 4. Теперь рассмотрим одного из оставшихся школьников (№ 5) – если он дружит с № 4 или с № 1, то у нас уже есть цепочка из 5 школьников-друзей, а если нет, то обязательно дружит с № 2, № 3 и оставшимся школьником № 6 (и тогда у нас есть цепочка № 1-№ 2-№ 3-№ 5-№ 6). Итак, есть цепочка из 5 школьников-друзей, переобозначим школьников в этой цепочке как *А-Б-В-Г-Д*, вне цепочки остался один школьник (назовем его *Е*). Если он дружит с *А* или *Д*, то цепочка из 6 школьников построена, а если нет, то точно дружит с *Б*, *В* и *Г*, но тогда можно сделать такую цепочку: *А-Б-Е-В-Г-Д*.

Второй способ.

Как и в предыдущем способе легко построить цепочку из 4 друзей. Теперь рассмотрим все возможные цепочки из друзей и рассмотрим из них самую длинную (в ней при этом не меньше 4 школьников). Докажем, что она содержит всех участников кружка. Пусть это не так (и она состоит из 4 или 5 школьников), тогда рассмотрим не вошедшего в эту цепочку школьника N. Он не дружит ни с первым, ни с последним, потому что иначе цепочку можно еще удлинить, а мы выбрали самую длинную (т.е. будет противоречие). Если в цепочке 4 школьника (1-2-3-4), то N не может дружить одновременно с 2 и 3 (иначе можно удлинить цепочку: 1-2-N-3-4 – противоречие), но тогда у него не больше одного друга в этой цепочке и плюс может быть еще оставшийся шестой школьник – всего не более двух друзей, что противоречит условию. Если в цепочке 5 школьников, то N не может одновременно дружить и 2 и 3 (иначе можно удлинить цепочку: 1-2-N-3-4-5 – противоречие), но тогда у него среди 2, 3, 4 не больше двух друзей (а с 1 и 5 он и так не дружит, как мы уже показали) – противоречит условию.

Критерии:
Приведен один или несколько примеров, удовлетворяющих условию задачи, и в них показана цепочка (показано, как передавать книжку), – за это продвижение ставить 0 баллов.
Доказано, что есть цепочка из 4 школьников, – 1 балл.
Доказано, что есть цепочка из 5 школьников, – 3 балла.
Обосновано, почему существует цепочка из 6 школьников, – 7 баллов.

5. Найдите все пары натуральных чисел (m, n), для которых НОК$(m, n) = 3m + 2n + 1$. (Напоминаем, что НОК – это наименьшее общее кратное чисел.)

Ответ: (3, 10) и (4, 9).

Решение:

Первый способ.

Отметим, что m не делится на n (иначе $НОК(m, n) = m < 3m + 2n + 1$) и n не делится на m (иначе $НОК(m, n) = n < 3m + 2n + 1$); в частности доказали, что $m \neq n$, а также $m \neq 1$ и $n \neq 1$. Еще заметим, что НОК двух чисел делится на каждое из них, поэтому $3m + 2n + 1$ делится на m (а тогда $2n + 1$ делится на m) и $3m + 2n + 1$ делится на n (а тогда $3m + 1$ делится на n).

Рассмотрим два случая.

(1) Пусть $m < n$ (тогда $m \leq n - 1$). Но тогда $3m + 1 = kn \geq n$, при этом $3m + 1 \leq 3(n-1)+1<3n$. Отсюда $1 \leq k<3$, тогда либо $k = 1$, либо $k = 2$. Если $k = 1$, то $3m + 1 = n$, но $2n + 1$ делится на m, поэтому $2(3m + 1) + 1 = 6m + 3$ делится на m, а тогда 3 делится на m (и ранее показано, что $m \neq 1$) – тогда $m = 3$, $n = 3\cdot3 + 1 = 10$ – это подходит: НОК$(3,10) = 30 = 3\cdot3 + 2\cdot10 + 1$. Если $k = 1$, то $3m + 1 = 2n$, но $2n + 1$ делится на m, тогда $2n + 1 = 3m + 2$ делится на m, откуда 2 делится на m, получили $m = 2$ (так как $m > 1$). В этом случае $3m + 1 = 7$, что не равно $2n$, так как нечетно.

(2) Пусть $m > n$ (то есть $n \leq m - 1$). Тогда $2n + 1 = km$, но $2n + 1 \leq 2(m - 1) + 1 < 2m$. Значит, $k < 2$, поэтому $k = 1$, $2n + 1 = m$. Но $3m + 1$ делится на n, тогда $3(2n + 1)+1 = 6n + 4$ делится на n, тогда 4 делится на n (и $n \neq 1$). Тогда $n = 2$ (при этом $m = 2n + 1 = 5$, но НОК$(5, 2) = 10 \neq 3\cdot5 + 2\cdot2 + 1$, не подходит) или $n = 4$ (в этом случае $m = 2n + 1 = 9$ – это подходит: НОК$(9, 4) = 36 = 3\cdot9 + 2\cdot4 + 1$ – подходит).

Второй способ.

Если m и n имеют общий делитель $d > 1$, то и НОК(m, n) делится на d, но $НОК(m, n) - (3m + 2n) = 1$ – левая часть равенства на d делится, а правая нет. Поэтому m и n взаимно просты (не имеют общих делителей, кроме 1), а тогда НОК$(m, n) = mn$.

Исходное равенство перепишется в таком виде: $mn = 3m + 2n + 1$.

Перенесем все в левую часть, по возможности разложим на множители:
$mn - 3m - 2n - 1 = m(n - 3) - 2(n - 3) - 7 = (m - 2)(n - 3) - 7$.

Таким образом, получили уравнение в натуральных числах: $(m - 2)(n - 3) = 7$.

Число m натуральное, поэтому $(m - 2)$ – целое число, не меньше –1. У числа 7 только три целых делителя, не меньших –1: –1, 1 и 7. Если $m - 2 = -1$, то $n - 3 = -7$, тогда $n < 0$ (не натуральное). При $m - 2 = 1$ получаем, что $n - 3 = 7$, откуда $m = 3$ и $n = 10$, а при $m - 2 = 7$ получаем, что $n - 3 = 1$, откуда $m = 9$ и $n = 4$ – обе эти пары подходят.

Критерии:
Найдены оба (!) решения – 1 балл.
В первом способе решения разобран один из двух случаев – плюс 2 балла.
Задача решена в недоказанном предположении, что числа взаимно просты, – доказательство оценивается в 1 балл.
Доказано, что числа взаимно простые, – плюс 2 балла.