МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
2018/2019 УЧЕБНЫЙ ГОД
8 КЛАСС (решения)

1. (*7 баллов*) Графики функций $y = kx + b$ и $y = bx + k$ пересекаются. Найдите абсциссу точки пересечения.

Решение.

Способ 1. Искомая абсцисса является решением уравнения $kx + b = bx + k$. Это уравнение приводится к виду $(k - b)x = k - b$. Так как данные графики пересекаются (не совпадают), то $k \neq b$, поэтому $x = 1$.

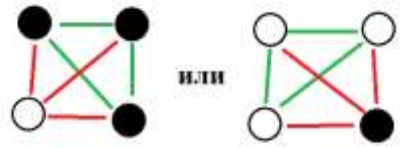
Способ 2. Заметим, что $x = 1$ является решением задачи, так как при $x = 1$ обе заданные линейные функции принимают одно и то же значение $y = k + b$. Так как их графики пересекаются, то есть эти прямые имеют ровно одну общую точку, то других решений нет.

Ответ. $x = 1$.

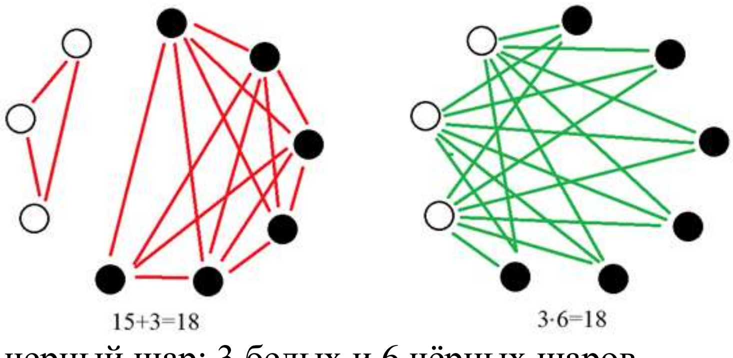
2. (*7 баллов*) В мешке b белых и c черных шаров. Чтобы решить, кто будет прогуливать собаку – Алёша или Борис, случайно выбирают два шара; если они будут одного цвета, собаку прогуливает Алёша, если разного – Борис. При каких b и c случайный выбор будет справедливым?

Решение.

Согласно рисунку, в мешке должно быть 3 белых и 1 черный шар или наоборот, 1 белый и три черных шара.



Возможно и другое решение. Например, может быть 3 белых шара и 6 черных шаров:

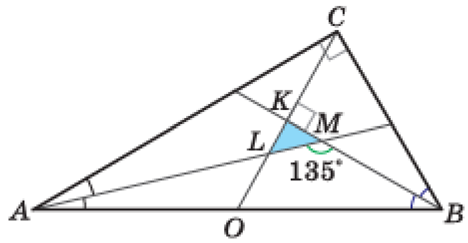


Ответ. 3 белых и 1 черный шар; 3 белых и 6 чёрных шаров.

Комментарий. Приведен один из примеров b и c – 4 балла.

3. (*7 баллов*) В треугольнике ABC из вершин A и B проведены биссектрисы, а из вершины C – медиана. Оказалось, что точки их попарного пересечения образуют прямоугольный треугольник. Найдите углы треугольника ABC.

Решение. Пусть M – точка пересечения биссектрис треугольника ABC, а его медиана CO пересекает проведённые биссектрисы в точках K и L (см. рисунок).



Так как $\angle AMB = 90^0 + \frac{1}{2}\angle C > 90^0$, то в полученном треугольнике KLM угол при вершине M прямым быть не может. Тогда из условия задачи следует, что $\angle AMB = 135^0$, поэтому $\angle ACB = 90^0$. Следовательно, $OC = OA = OB$, то есть треугольники AOC и BOC равнобедренные.

Без ограничения общности можно считать, что прямым в треугольнике KLM является угол при вершине K. Тогда в треугольнике BOC высота BK совпадает с биссектрисой, поэтому $OB = BC$. Таким образом, треугольник BOC равносторонний. Следовательно, $\angle ABC = 60^0$, значит, $\angle BAC = 30^0$.

Ответ. 90^0, 60^0, 30^0.

4. (*7 баллов*) Петя складывал два натуральных числа и по ошибке в конце одного из них приписал какую-то лишнюю цифру. В результате он вместо правильного ответа 12345 получил сумму 44444. Какие числа он складывал?

Решение.

Пусть Пете надо было сложить числа x и y. Когда он к одному из них (для определенности − к x) приписал цифру c, то в результате число стало равно $10x+c$. Таким образом, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 12345, \\ (10x + c) + y = 44444. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем $9x+c=32099$, то есть $9x = 32099 - c$. Таким образом, $(32099 - c)$ делится на 9. Учитывая, что c – цифра, находим, что единственно возможное ее значение – это $c = 5$. В таком случае, $9x = 32094$, и $x = 3566$. Тогда $y = 12345 - x = 8779$.

Следовательно, Петя складывал числа 3566 и 8779, но к первому по ошибке приписал в конце пятерку и фактически сложил числа 35665 и 8779.
Ответ. 3566 и 8779.

5. (*7 баллов*) Сравните результат произведения $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 98 \cdot 99$ и число 50^{99}.
Решение.
Так как $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$, то $ab < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$. Чтобы воспользоваться этим свойством распишем произведение в виде:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 98 \cdot 99 = 1 \cdot 99 \cdot 2 \cdot 98 \cdot 3 \cdot 97 \cdot \ldots \cdot 49 \cdot 51 \cdot 50.$$

$$1 \cdot 99 \cdot 2 \cdot 98 \cdot \ldots \cdot 49 \cdot 51 \cdot 50 < \left(\frac{1+99}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{2+98}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1+99}{2}\right)^2 \cdot \ldots \cdot \left(\frac{49+51}{2}\right)^2 \cdot 50$$

$$\left(\frac{1+99}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{2+98}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1+99}{2}\right)^2 \cdot \ldots \cdot \left(\frac{49+51}{2}\right)^2 \cdot 50 = \underbrace{50^2 \cdot 50^2 \cdot 50^2 \cdot \ldots \cdot 50^2}_{49 \text{ множителей}} \cdot 50 =$$
$$= 50^{99}.$$

Таким образом, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 98 \cdot 99 < 50^{99}$.
Ответ. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 98 \cdot 99 < 50^{99}$.