2018 год

Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап

Решения

9 класс

1. Перемножив первый с четвертым и второй с третьим множители, получим уравнение: $(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=360.$
   Сделав замену $y = x^2+5x+4$, получим $y^2+2y - 360 = 0,$ откуда $y_1=-20,$ $y_2=18.$ Следовательно, имеем уравнения:
   $x^2+ 5x + 24=0,\ \ x^2+ 5x - 14=0.$
   Первое уравнение не имеет решений, из второго получим: $x_1=-7,\ x_2=2.$

   Ответ: $x_1=-7,\ x_2=2.$

2. Чтобы найти ответ, разложим число 494 на простые множители: 494 = 2 · 13 · 19. Поскольку 13 · 19 > 100, то число 13 входит в один из двух сомножителей, дающих в произведении 494, а число 19 – в другой. Получаем четыре варианта разложения трехзначного числа на простые множители:
   1) первый сомножитель – 13, второй – 19 · 2 = 38;
   2) первый сомножитель - 19 · 2 = 38, второй – 13;
   3) первый сомножитель – 19, второй – 13 · 2 = 26;
   4) первый сомножитель - 13 · 2 = 26, второй – 19.

   Последняя цифра первого сомножителя с первой цифрой второго совпадает лишь у чисел 13 и 38. Мы не только получили ответ, но и убедились, что он единственен.

   Ответ: 138.

3. Из условия следует, что $AN = MC,\ AP = CQ,\ \ \angle A = \angle C = 60^0$. Следовательно, треугольники NAP и MCQ равны по двум сторонам и углу между ними, и в них $\angle ANP = \angle QMC$ и $\angle APN = \angle CQM.$ А так как во всяком треугольнике сумма углов равна 180^0, то $\angle NOQ = \angle MOP = 180^0 - (\angle QMC + \angle APN) = 180^0 - (180^0 - \angle C - \angle MQC + \angle CQM) = 60^0$.

   Ответ: 60^0.

4. Пусть в классе x ребят младше Пети, тогда $2x$ ребят старше Пети. Итак, в классе $3x + 1$ ребят. Пусть в классе y ребят старше Кати, тогда $3y$ ребят младше Кати. Итак, в классе $4y + 1$ ребят. Это означает, что число учеников в классе имеет вид $N = 3x + 1$ и $N = 4y + 1$, откуда $N - 1 = 3x$ и $N - 1 = 4y$. Таким образом, число $N -1$ делится и на 3, и на 4, т.е. оно делится на 12. Единственное такое число между 19 и 29 – это 24. Значит, $N - 1 = 24$, откуда $N = 25$.
   Ответ: 25 учеников.

5. Покажем, что к моменту финиша самого быстрого бегуна любые двое разноцветных бегунов встретились ровно два раза, откуда и будет вытекать ответ $2 \cdot 5 \cdot 5 = 50$. Пусть s (км) — длина дорожки. Положим $T = 2s/12$ (ч). Так как скорость самого быстрого бегуна меньше 12 км/ч, он дважды пробежит дорожку за время, большее T. Покажем, что все возможные встречи бегунов случатся раньше, чем после старта истечёт T часов. Возьмём двух разноцветных бегунов. Первая их встреча случится, когда они вместе пробегут длину дорожки, и это произойдёт раньше, чем через $s/18 = T/3 < T$ часов. Когда более быстрый из этих двоих пробежит всю дорожку, более медленный, скорость которого составляет более $9/12 = 3/4$ скорости более быстрого, пробежит уже больше $3/4$ длины дорожки, и потому более быстрый, повернув, не успеет его догнать (для этого он должен был бы бежать по крайней мере вчетверо быстрее более медленного). Значит, вторая встреча этих двоих случится, когда оба будут бежать назад. К этому моменту они вместе пробегут расстояние $3s$, и это произойдёт раньше, чем через $3s/18 = T$ часов, что и завершает доказательство.

Ответ: 50.