МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

2018-2019 УЧЕБНЫЙ ГОД

9 КЛАСС

Максимальный балл: 35 баллов (по 7 баллов за каждое задание)

РЕШЕНИЯ

1. На доске нельзя получить единственное число 1, так как при каждой операции количество нечётных чисел либо уменьшается на 2, либо не изменяется, а первоначально их 1010. Значит, одно нечётное число в итоге остаться не может.
Ответ: нельзя.

2.
1) По свойству биссектрисы $\frac{AC}{BC}=\frac{3}{2}$, значит, BC = 4.

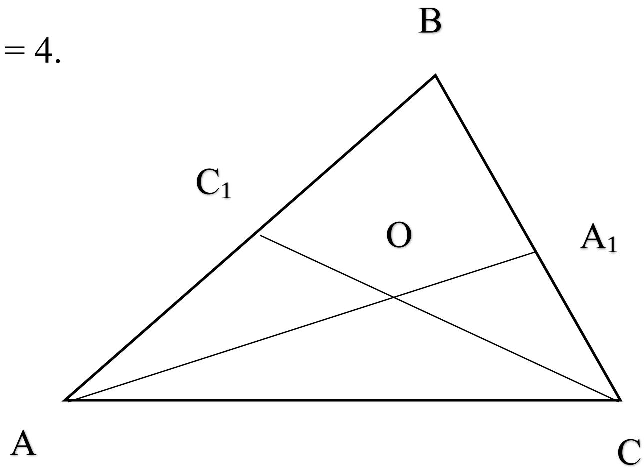
2) По формуле Герона $S_{\Delta ABC}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$.

3) $S_{\Delta ACC1}$ =3/5 $S_{\Delta ABC}=\frac{9\sqrt{7}}{4}$.

4) $\frac{CO}{OC_1}=\frac{AC}{AC_1}=\frac{6}{3}=2$.

5) $S_{\Delta AOC}$ =2/3 $S_{\Delta ACC1}=\frac{3\sqrt{7}}{2}$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{7}}{2}$.



3. $(x+1)\cdot\sqrt{x^2+x+1}+(x-1)\cdot\sqrt{x^2+1}+2\cdot x=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\cdot\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+1}\right)+2\cdot x+\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}$=0.

Пусть $\sqrt{x^2+x+1}=a, \sqrt{x^2+1}=b$, тогда $x=a^2-b^2$, уравнение примет вид:

$$(a^2-b^2)\cdot(a+b)+2\cdot(a^2-b^2)+a-b=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(a-b)\cdot(a+b)^2+2\cdot(a-b)\cdot(a+b)\quad+a-b=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(a-b)\cdot(a+b+1)^2=0\Leftrightarrow a=b.$$

Откуда: $x^2+x+1=x^2+1\Leftrightarrow x=0$.

Ответ: 0.

4. $\frac{1}{a}=\frac{a+b+c+d+m}{a}=1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{d}{a}+\frac{m}{a};$

$\frac{1}{b}=\frac{a+b+c+d+m}{b}=\frac{a}{b}+1+\frac{c}{b}+\frac{d}{b}+\frac{m}{b};$

$\frac{1}{c}=\frac{a+b+c+d+m}{c}=\frac{a}{c}+c+1+\frac{d}{c}+c;$

$$\frac{1}{d} = \frac{a+b+c+d+m}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d} + 1 + \frac{m}{d};$$

$$\frac{1}{m} = \frac{a+b+c+d+m}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m} + \frac{d}{m} + 1.$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{m} = 5 + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + \cdots + \left(\frac{m}{d} + \frac{d}{m}\right) \geq 5 + 2 \cdot 10 = 25.$$

(10 скобок вида $x + \frac{1}{x} \geq 2$ при $x > 0$)
Ответ: неравенство справедливо.

5. Пусть масса нового сплава равна 1, а относительные массы 1-го, 2-го и 3-его сплавов в нём равны соответственно x, y, z; содержание хрома в новом сплаве равно k. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ 0{,}9x + 0{,}3z = 0{,}45, \\ 0{,}4x + 0{,}1y + 0{,}5z = k. \end{cases}$$

Из 2-го уравнения: $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}z$. Подставляя в 1-ое уравнение получим: $x = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}z$.
Подставляя в 3-е уравнение: $k = 0{,}25 + 0{,}2z$.
Так как $z \geq 0$, то $k_{min} = 0{,}25 = 25\%$.
$x = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}z \Leftrightarrow z = \frac{3}{4} - \frac{3}{2}x$
$k = 0{,}25 + 0{,}2z = 0{,}4 - 0{,}3x$.
Так как $x \geq 0$, то $k_{max} = 0{,}4 = 40\%$.
Ответ: наименьшее процентное содержание хрома в новом сплаве равно 25 %, а наибольшее – 40 %.