Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике

2018/19 учебный год

9 класс

Ответы и решения задач

1. УСЛОВИЕ

Найти два трехзначных числа, зная, что их сумма кратна 498, а частное кратно 5.

Решение. Пусть a – меньшее, b – большее из искомых трехзначных чисел, т.е. $100 \le a < b < 1000$ и $a + b = 498k$, $b = 5a$, или $6a = 498k$, $a = 83k$, тогда $b = 415k$. Из первого получаем, что $k \ge 2$, а из второго $k \le 2$, отсюда $k = 2$, $a = 166$, $b = 830$.

Ответ: 166 и 830.

2. УСЛОВИЕ

Можно ли расставить по окружности 20 красных и несколько синих фишек так, чтобы в каждой точке, диаметрально противоположной красной фишке, стояла синяя и никакие две синие фишки не стояли рядом?

Доказательство. По условию красные и синие фишки должны чередоваться (на окружности), значит, всего их 40. На полуокружности между красной и противоположной ей синей фишкой стоят 19 фишек, значит, крайние из этих 19 – одноцветны, а они должны быть разноцветными, как соседние – одна – с красной, другая – с синей. Следовательно, указанная в задаче расстановка фишек невозможна.

3. УСЛОВИЕ

В розыгрыше кубка по футболу (в один круг) участвует 30 команд. Доказать, что в любой момент найдутся две команды, сыгравшие одинаковое число игр.

Доказательство. Возможны два случая. Первый случай – хотя бы одна из команд не сыграла еще ни одной игры. Тогда количество игр у любой команды не больше 28, т.е. возможное число игр у любой команды принимает одно из 29 значений: 0, 1, 2, …, 28. Разбив 30 команд на 29 классов по числу сыгранных игр, мы заведомо найдем класс, в котором не меньше двух команд. Второй случай – каждая команда сыграла хотя бы одну игру; количество игр принимает одно из 29 значений: 1, 2, …, 29. Итак, опять число команд больше числа игр, поэтому найдутся две команды, сыгравшие одинаковое количество игр.

4. УСЛОВИЕ

Доказать, что если p – простое число и $p > 3$, то число $p^2 - 1$ делится на 24.

Доказательство. Очевидно, $(p - 1)\,p\,(p + 1)$ делится на 3, но p – простое и $p > 3$, значит, p не делится на 3, т.е. $(p - 1)(p + 1)$ делится на 3. Кроме того, p – нечетно (как простое, большее двух), значит, четны $p - 1$ и $p + 1$, поэтому одно из них заведомо делится на 2, другое – на 4, т.е. $(p - 1)(p + 1)$ делится на 8.

5. УСЛОВИЕ

Для каких n существует выпуклый n–угольник, у которого одна сторона имеет длину 1, а длины всех диагоналей – целые числа?

Решение. При $n = 4$ и $n = 5$ можно построить многоугольники, одна сторона которых равна 1, а диагонали, «ограничивающие» эту сторону, равны 2. Если же $n \geq 6$, то, если $AB = 1$, диагонали, выходящие из одной из вершин и соединяющие ее с A и B, равны (как целочисленные, разность которых < 1). Поэтому при $n \geq 6$ будут два разных равнобедренных треугольника с основанием AB и третьей вершиной – в вершине n-угольника, значит, одна из этих вершин лежит внутри другого треугольника, т.е. внутри многоугольника, что противоречит его выпуклости.

Ответ: $n = 4$ и $n = 5$.

6. УСЛОВИЕ

В шахматном турнире участвовало 8 человек, и все они набрали разное количество очков. Шахматист, занявший второе место, набрал столько же очков, сколько четыре последних. Как сыграли между собой шахматисты, занявшие третье и седьмое места?

Доказательство. Пусть $x_1, \ldots, x_8$ – количество очков, набранных каждым шахматистом. По условию $x_1 > x_2 > \ldots > x_8$.

Лучший участник сыграл 7 партий, значит, $x_1 \leq 7$, т.к. $x_2 < x_1$, то $x_2 \leq 6{,}5$. Четыре последних шахматиста сыграли между собой 6 партий, в которых набрали 6 очков, значит, общее число их очков не меньше 6, т.е.

$$x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 6,$$

но по условию $x_2 = x_5 + x_6 + x_7 + x_8$, значит, $x_2 \geq 6$. Итак, $6 \leq x_2 \leq 6{,}5$, т.е. $x_2 = 6{,}5$ или $x_2 = 6$. Если бы $x_2 = 6{,}5$, то второй шахматист выиграл 6 партий, а одну свел вничью, следовательно, первый шахматист не выиграл у второго, поэтому $x_1 \leq 6{,}5$, т.е. $x_1 \leq x_2$, что противоречит условию. Итак, $x_2 \neq 6{,}5$, значит, $x_2 = 6$, следовательно, $x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 6$, т.е. четыре последних шахматиста все свои очки набрали лишь из встречи друг с другом, а всем первым игрокам – проиграли, в частности, седьмой игрок проиграл третьему.