Математика, 9 класс, муниципальный этап

Общие принципы проверки и оценивания олимпиадных работ

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор одного из случаев методом, позволяющим решить задачу в целом, доказательство леммы, используемой в одном из доказательств, нахождение примера или доказательства оценки в задачах типа «оценка + пример» и т.п.). Наконец, возможны как существенные, так и не влияющие на логику рассуждений логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать все вышеперечисленное.

В соответствии со стандартными правилами проведения математических олимпиад школьников ***каждая задача оценивается в целое число баллов от 0 до 7***.

Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Ниже будут приведены критерии к предложенным задачам олимпиады (локальные критерии), содержащие указания к оцениванию (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Такие локальные критерии по отдельным задачам имеют более высокий приоритет по отношению к универсальным критериям: к примеру, если в универсальных критериях за рассмотрение одного из двух случаев сказано, что это оценивается в 4 балла, а в локальных критериях к задаче – что в 2 балла, то баллы выставляются в соответствии с локальными критериями.

Важно отметить, что любое правильное (!) решение оценивается в 7 баллов.

Оценивается только математическая правильность, корректность, полнота решения; баллы не снижаются за «недостаточную» красоту, оптимальность решения, за исправления и помарки (позволяющие прочитать и оценить текст работы. Недопустимо снимать баллы за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Все решения, если не указано противное, требуют обоснования.
Если решения не совпадают с приведенными, читайте внимательно!

Максимально за все задания олимпиады – 35 баллов.

№ задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**Всего**
Баллы	7	7	7	7	7	**35**

Решения, критерии и указания по проверке

1. У дрессировщика Бронислава Распашного спросили, сколько у него в цирке львов, – он ответил, что в 5 раз меньше, чем не львов. На вопрос, сколько у него тигров, он ответил, что в 5 больше, чем не тигров. Могут ли быть леопарды в цирке у Бронислава Распашного? Объясните свой ответ.

Ответ: не могут.

Решение:

Львы составляют 1/6 от общего количества животных (пусть львов X, тогда не львов $5X$, всего животных в цирке $6X$, и тогда X от $6X$ – это 1/6 часть). Аналогично можем сказать, что тигры составляют 5/6 от общего количества животных. Но тогда львы и тигры составляют $1/6 + 5/6 = 1$ от общего количества (то есть всех) животных – поэтому никаких других животных (в том числе леопардов) в цирке Бронислава Распашного быть не может.

Критерии:

Верный ответ («не могут») без верного обоснования – 0 баллов.

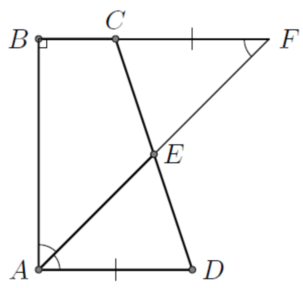
Рассмотрение частного случая (например, рассмотрен случай 6 животных = 1 лев и 5 тигров) баллов не добавляет.

2. Биссектриса угла BAD прямоугольной трапеции $ABCD$ (с основаниями AD и BC, $\angle BAD = 90^\circ$) пересекает боковую сторону CD в точке E. Найдите отношение $CE{:}ED$, если $AD + BC = AB$.

Ответ: 1:1.

Решение:

Продолжим биссектрису AE до пересечения с прямой BC (обозначим точку пересечения через F). Так как $\angle ABC$ прямой и $\angle FAB = 45^\circ$, то и $\angle AFB = 45^\circ$, поэтому FAB – равнобедренный прямоугольный треугольник, $AB = BF$.



Но тогда $CF = BF – BC = AB – BC = AD$.

Таким образом, в четырехугольнике $ACFD$ противоположные стороны AD и CF равны и параллельны, поэтому его диагонали CD и AF точкой пересечения (E) делятся пополам. Поэтому $CE : ED = 1{:}1$.

Критерии:

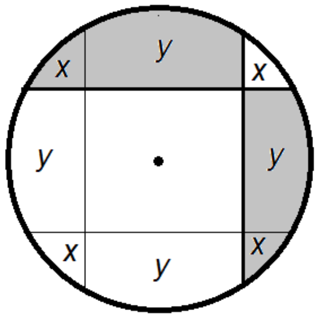
Есть дополнительное построение, приводящее к решению, – 1 балл.

Используется, но не доказано, что треугольники AED и FEC равны, – ставить не более 3 баллов.

3. Марио принес круглую пиццу площадью 4 *м*^{2} и разрезал ее двумя перпендикулярными прямолинейными разрезами на 4 части. Каждый разрез проходил на расстоянии 50 *см* от центра пиццы. Его брат Луиджи взял самый большой кусок и самый маленький кусок, а остальные два куска достались Марио. Найдите общую площадь кусков, которые получил Марио.

<u>Ответ:</u> 1,5 *м*^{2}.

Решение:



Проведем еще два разреза, симметрично (относительно центра) уже сделанным. Площади некоторых областей обозначим так, как на рисунке справа (закрашено то, что получил Марио). Тогда заметим, что Марио получил куски площадью $x + y$ и $x + y$ (всего $S = 2x + 2y$), а Луиджи – маленький кусок площади x и большой кусок, состоящий из двух частей y, одной части x и центрального квадрата со стороной 1 *м* (2 раза по 50 *см*) – то есть, всего площадью $2x + 2y + 1$ *м*^{2} = $S + 1$ *м*^{2}. Вместе они съели целую пиццу, поэтому $S + (S + 1$ *м*$^2) = 4$ *м*^{2}, откуда $S = 1{,}5$ *м*^{2}.

<u>Критерии:</u>

Верный ответ без верного обоснования – 1 балл.

Показано, что куски, доставшиеся Луиджи, можно составить из кусков, доставшихся Марио, плюс центральный квадрат – 3 балла.

Верная идея решения, но неверный ответ из-за неверно посчитанной площади центрального квадрата или арифметической ошибки при решении уравнения, – ставить 4 балла.

4. Невезучему Емеле дали несколько металлических шариков, из которых он сломал 3 самых больших (их масса составляла 35% от массы всех шариков), потом 3 самых маленьких потерял, а оставшиеся шарики (их масса составляла 8/13 от несломанных) принес домой. Сколько шариков дали Емеле?

<u>Ответ:</u> 10 шариков.

Решение:

Пусть суммарная масса всех шариков равна M. Из них Емеля сломал шарики общей массой $\frac{35}{100}M = \frac{7}{20}M$, не сломал шарики общей массой $\frac{13}{20}M$, принес домой шарики общей массой $\frac{8}{13}\cdot\frac{13}{20}M = \frac{8}{20}M$, а потерял шарики общей массой $M - \frac{8}{20}M - \frac{7}{20}M = \frac{5}{20}M$.

Заметим, что Емеля принес домой больше 3 шариков, потому что три самых тяжелых шарика составляют по массе $\frac{7}{20}M$, а принес он домой уже $\frac{8}{20}M$.

Но Емеля не мог принести домой 5 или больше шариков, потому что иначе их средняя масса будет не больше $\frac{1}{5}\cdot\frac{8}{20}M = \frac{2}{25}M$, а средняя масса трех самых легких шариков составляет $\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{20}M = \frac{1}{12}M$, а $\frac{1}{12}M > \frac{2}{25}M$ (т.е. средняя масса трех самых легких получается больше средней массы нескольких следующих по массе).

Итак, остался единственный возможный случай, когда Емеля принес домой 4 шарика, тогда всего ему дали 10 шариков.

Критерии:
Верный ответ при неверном обосновании – 1 балл.
Записаны доли сломанных/потерянных/принесенных шариков – плюс 1 балл.
Доказано, почему он не мог принести домой 3 или меньше шариков – плюс 2 балла.
Доказано, почему он не мог принести домой 5 или больше шариков – плюс 3 балла.

5. На некоторые клетки шахматной доски 8×8 положили по одной конфете. Оказалось, что в каждой строчке и в каждом столбце лежит четное количество конфет. Докажите, что тогда и на всех белых клетках лежит четное количество конфет.

Решение:

Пусть левая нижняя клетка доски черная (если белая, то это ничего не меняет – просто докажем, что на всех черных клетках четное число конфет). Разобьем все клетки шахматной доски на 4 группы, как показано на рисунке (белые клетки получают номера 2 и 3, черные – 1 и 4). Пусть количество конфет в клетках группы 1 равна *А*, в клетках группы 2 – *Б*, в клетках группы 3 – *В*, в клетках группы 4 – *Г*.

2	4	2	4	2	4	2	4
1	3	1	3	1	3	1	3
2	4	2	4	2	4	2	4
1	3	1	3	1	3	1	3
2	4	2	4	2	4	2	4
1	3	1	3	1	3	1	3
2	4	2	4	2	4	2	4
1	3	1	3	1	3	1	3

Рассмотрим строки № 1 (нижняя строка), № 3, № 5 и № 7 (вторая сверху) – в каждой из них четное количество конфет (значит и в сумме четное), при этом в этих строках стоят только клетки групп 1 и 3, поэтому количество конфет в клетках группы 1 в сумме с количеством конфет в клетках группы 3 – четное, то есть *А* + *В* – четное.

Аналогично суммы *Б* + *Г* (из рассмотрения четных строк), *А* + *Б* (из рассмотрения нечетных столбцов) и *В* + *Г* (четные столбцы) – четные.

Раз *А* + *В* четное, то *А* и *В* одной четности (оба четные или оба нечетные).

Из того, что *А* + *Б* четное, следует, что *А* и *Б* одной четности.

Но тогда *В* и *Б* одной четности, поэтому *Б* + *В* – четное число.

Но *Б* + *В* – это и есть количество конфет в белых клетках.

Критерии:
Вывод, сделанный на рассмотрении одного или нескольких частных случаев, – задача не решена, 0 баллов.
Вывод, сделанный на рассмотрении частного случая и дальнейшем утверждении, что если переставим куда-то одну-две конфеты, то нарушится условие задачи, – задача не решена, 0 баллов (нет обоснования, почему любую расстановку можно получить такими минимальными перестановками).