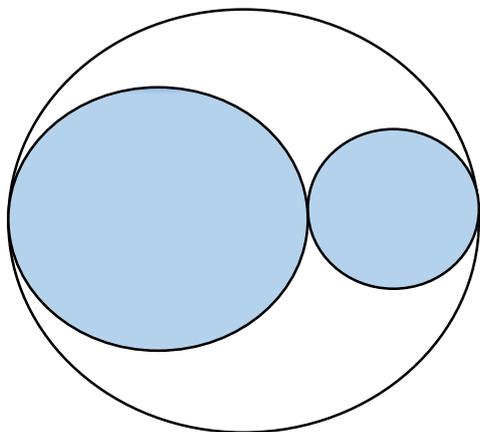


Муниципальный этап  
Всероссийской олимпиады школьников  
2018-2019 учебный год  
МАТЕМАТИКА  
9 класс  
(Задания)

Максимальный балл – 35

Время на выполнение работы – 240 минут

1. Все натуральные числа от 1 до 18 разбиты на пары так, что сумма чисел каждой пары является полным квадратом. Какое число стоит в паре с числом 1? Ответ обоснуйте.
2. Первый член последовательности равен 4, второй  $4^2 = 16$ , третий  $(1+6)+1=8$ , четвертый  $8^2 = 64$ , пятый  $(6+4)+1=11$  и т. д., то есть следующим членом последовательности берется поочередно квадрат предыдущего члена или число, на единицу больше суммы цифр предыдущего члена. Найти 2018-ый член этой последовательности.
3. Две окружности касаются внешним образом и каждая из них касается третьей внутренним образом так, что их центры расположены на одной прямой (см. рисунок). Может ли площадь не закрашенной части быть больше закрашенной?



4. Окружность с центром в точке  $O$  вписана в треугольник  $ABC$ . Прямая  $AO$  вторично пересекает окружность, описанную около треугольника  $ABC$ , в точке  $D$ . Докажите, что окружность с центром в точке  $D$ , проходящая через точку  $O$ , содержит точки  $B$  и  $C$ .
5. Найти наибольшее натуральное число  $n$ , при котором число  $\underbrace{99 \dots 99}_{999 \text{ цифр}}$  делится на  $9^n$ .

Муниципальный этап  
Всероссийской олимпиады школьников  
2018-2019 учебный год  
МАТЕМАТИКА  
10 класс  
(Задания)

Максимальный балл – 35

Время на выполнение работы – 240 минут

1. Сравните  $\frac{2019}{201820182018}$  и  $\frac{2018}{201720172017}$ .

2. Вычислить сумму

$$\frac{1}{1+3^{-2018}} + \frac{1}{1+3^{-2017}} + \dots + \frac{1}{1+3^{-1}} + \frac{1}{1+3^0} + \frac{1}{1+3^1} + \dots + \frac{1}{1+3^{2018}}$$

3. Доказать, что площадь любого прямоугольного треугольника не больше, чем одна четвертая от квадрата его гипотенузы. В каком случае выполняется равенство?

4. Доказать, что  $2019^{2018} - 1$  делится на 101

5. На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  отмечена точка  $D$  (отличная от  $B$  и  $C$ ) так, что биссектрисы углов  $ACB$  и  $ADB$  пересекаются на стороне  $AB$ . Точка  $D'$  симметрична точке  $D$  относительно прямой  $AB$ . Доказать, что точки  $C$ ,  $A$  и  $D'$  лежат на одной прямой.

Муниципальный этап  
Всероссийской олимпиады школьников  
2018-2019 учебный год  
МАТЕМАТИКА  
11 класс  
(Задания)

Максимальный балл – 35  
Время на выполнение работы – 240 минут

1. Сравните  $2018^{2019}$  и  $2019^{2018}$ .

2. Решить уравнение в действительных числах

$$\left[ \frac{x}{2} \right] + \left[ \frac{2x}{3} \right] = x$$

где  $[a]$  – целая часть числа  $a$ .

3. Доказать, что  $|\sin x| > |\cos y|$  тогда и только тогда, когда  $|\sin y| > |\cos x|$ .

4. Функция  $f(n)$  удовлетворяет условию  $f(1) + f(2) + \dots + f(n) = n^2 f(n)$ , для любых натуральных  $n$ . Известно, что  $f(1) = 2019$ . Найти  $f(2018)$ .

5. Три луча в пространстве, выходящие из одной точки  $O$ , образуют попарно углы  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$ , причем  $0 < \alpha \leq \beta \leq \gamma \leq 180^\circ$ . Доказать, что  $\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} > \sin \frac{\gamma}{2}$ .