# 10 класс

10.1. Пусть $f(x) = x^2 + 2ax + b$. Известно, что уравнение $f(x) = 0$ имеет два корня. Докажите, что тогда при любом положительном $k$ уравнение $f(x) + k(x+a)^2 = 0$ также имеет два корня.

**Первое решение.** По условию $a^2 - b > 0$. Пусть $F(x) = f(x) + k(x+a)^2$. Вычислим дискриминант нового трёхчлена $F(x)$. Имеем:

$$F(x) = x^2 + 2ax + b + k(x+a)^2 = (k+1)x^2 + 2a(k+1)x + (b + ka^2).$$

Значит,

$$\frac{1}{4}D_1 = a^2(k+1)^2 - (k+1)(b+ka^2) = (k+1)(a^2 - b),$$

что доказывает утверждение задачи, поскольку $k + 1 > 0$.

**Второе решение.** Перепишем исходный трёхчлен в виде $(x+a)^2 + (b - a^2)$. Его значение в вершине равно $b - a^2 < 0$. Новый трёхчлен есть

$$F(x) = (k+1)(x+a)^2 + (b - a^2),$$

причём его старший коэффициент положителен. Так как трёхчлен $F$ в точке $x = -a$ принимает отрицательное значение $b - a^2$, то он имеет корни.

**Комментарий.** Замечено, что вершина новой параболы имеет абсциссу $-a$ — 2 балла.

10.2. Окружность, проходящая через вершины $A$, $B$, $D$ трапеции $ABCD$, пересекает её боковую сторону $CD$ в точке $K$. Докажите, что окружность, описанная около треугольника $BCK$, касается прямой $AB$.

**Решение.** Пусть $P$ — точка, лежащая на продолжении отрезка $AB$ за точку $B$ (см. рис. 6). Тогда утверждение задачи равносильно тому, что угол $PBC$ равен вписанному углу $CKB$. Но углы $CKB$ и $DKB$ являются смежными, поэтому $\angle CKB = 180^\circ - \angle DKB$. С другой стороны, четырехугольник $DKBA$ — вписанный, поэтому $\angle DKB = 180^\circ - \angle DAB$. Наконец, из параллельности сторон $AD$ и $BC$ трапеции следует, что $\angle CBP = \angle DAB$. Утверждение доказано.

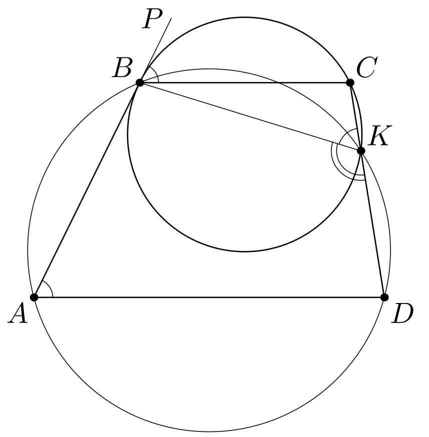


Рис. 6

**Комментарий.** Указано, какое равенство углов равносильно условию — 2 балла.

10.3. На клетчатой доске $8 \times 8$ размещён 1 клетчатый корабль размера $1 \times 3$. Одним выстрелом разрешается прострелить целиком все 8 клеток одной строки или одного столбца. Какого минимального количества выстрелов хватит, чтобы гарантированно ранить корабль?

**Ответ.** 4 выстрелов.

**Решение.** Сделаем 4 выстрела так, как показано на рис. 7. Тогда видно, что корабль гарантированно будет ранен. Покажем, что если сделано только 3 выстрела, то можно не ранить корабль. Пусть, например, в строки сделано не более одного выстрела. Тогда в любом столбце, в который не сделано выстрела, прострелено не более одной клетки, и поэтому в этом столбце может стоять корабль, который не будет ранен.

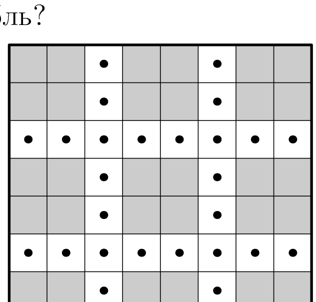

Рис. 7

**Комментарий.** Показано только, как за 4 выстрела ранить корабль — 3 балла.

Доказано только, что 3 выстрелов может не хватить — 3 балла.

Приведён правильный пример 4 выстрелов, но не объяснено, что будет ранен корабль — 1 балл (вместо 3 баллов по первому критерию).

10.4. Верно ли, что любое чётное число, большее 1000, можно представить в виде

$$n(n+1)(n+2) - m(m+1),$$

где $m$ и $n$ — натуральные числа?

**Ответ.** Неверно.

**Решение.** Заметим, что произведение трёх последовательных натуральных чисел $n(n+1)(n+2)$ делится на 3. Разберём несколько случаев.

Если $m$ имеет остаток 0 или 2 при делении на 3, то $m(m+1)$ делится на 3. Значит, число $n(n+1)(n+2) - m(m+1)$ делится на 3.

Если $m$ имеет остаток 1 при делении на 3, то $m(m+1)$ имеет остаток 2 при делении на 3. Значит, число $n(n+1)(n+2) - m(m+1)$ имеет остаток 1 при делении на 3.

Это означает, что число $n(n+1)(n+2) - m(m+1)$ не может иметь остаток 2 при делении на 3. То есть, например, число 1004 в требуемом виде представить не удастся.

**Комментарий.** Верный ответ без объяснения — 0 баллов.

Доказано, что разность произведений не может иметь остаток 2 при делении на 3, но не приведён пример конкретного числа, которое не представимо в нужном виде — баллы не снимаются.

10.5. Можно ли выбрать число $n \geqslant 3$ и так заполнить таблицу $n \times n$ различными натуральными числами от 1 до $n^2$, чтобы в каждой строке нашлись три числа, одно из которых равно произведению двух других?

**Ответ.** Нельзя.

**Решение.** Предположим, что таблицу удалось заполнить требуемым образом. Рассмотрим в каждой строке три числа: два множителя и их произведение. Отметим в каждой строке наименьший множитель. Так как строк $n$, то всего наименьших множителей $n$. А так как они различны, то среди них найдётся такой, который не меньше $n$. Но тогда в строке, где находится этот множитель, второй множитель будет не меньше $n+1$. Поэтому их произведение не меньше $n(n+1) > n^2$. Противоречие.

**Комментарий.** Верный ответ без объяснения — 0 баллов.