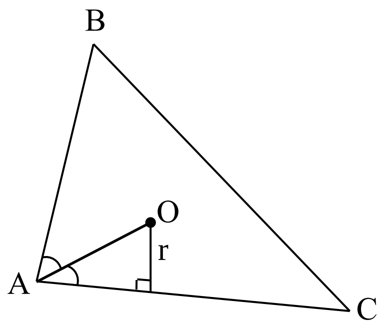
11-й класс

11.1 В треугольнике ABC угол A − наибольший, а угол C − наименьший. Какая из вершин A,B,C находится ближе всего к центру вписанной окружности?

Решение: См. рис.



$$\frac{r}{AO} = \sin\frac{A}{2},$$

$$AO = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$$

Аналогично, $BO = \dfrac{r}{\sin\frac{B}{2}}$, $CO = \dfrac{r}{\sin\frac{C}{2}}$.

Так углы $\frac{A}{2},\frac{B}{2},\frac{C}{2}$ лежат в первой четверти, в которой синус возрастает, то $\sin\frac{A}{2} > \sin\frac{B}{2} > \sin\frac{C}{2}$. Поэтому $\dfrac{r}{\sin\frac{A}{2}} < \dfrac{r}{\sin\frac{B}{2}} < \dfrac{r}{\sin\frac{C}{2}}$, т.е. $AO < BO < CO$, т.е. вершина A − ближайшая к точке O.

11.2 Числа $x = 999$ и $x = 1001$ удовлетворяют неравенству $x^2 + px + q < 0$. Докажите, что дискриминант квадратного трехчлена $x^2 + px + q$ больше 4.

Решение: Если x_1 и x_2 − корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, то $x_2 - x_1 = \dfrac{\sqrt{D}}{a}$ откуда $D = a^2(x_2 - x_1)^2$

В нашем случае числа 999 и 1001 очевидно находятся между корнями x_1 и x_2 (пусть $x_2 > x_1$), поэтому $x_2 - x_1 > 1001 - 999 = 2$. Кроме того, $a = 1$. Следовательно, $D = (x_2 - x_1)^2 > 2^2 = 4$.

11.3 Обозначим через $[a]$ целую часть числа *a*, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее *a*. Решите уравнение $[x] + [2x] = 2018$.

Решение: Возьмем любой $x > 0$. Пусть $[x] = t$. Тогда $x = t + \alpha$. где α − дробная часть числа *x*, $0 \le \alpha < 1$. Имеем $2x = 2t + 2\alpha$, поэтому $[2x] = 2t + [2\alpha]$. Следовательно, $[x] + [2x] = t + 2t + [2\alpha] = 3t + [2\alpha]$. Заметим, что число $[2\alpha]$ равно либо 0, если $\alpha < \frac{1}{2}$, либо 1, если $\frac{1}{2} \le \alpha < 1$. Поэтому число $[x] + [2x]$ при делении на 3 дает в остатке либо 0, либо 1. Но число 2018 при делении на 3 дает остаток 2. Значит, уравнение $[x] + [2x] = 2018$ корней не имеет

11.4 Жили-были 20 шпионов. Каждый из них написал донос на 10 своих коллег. Докажите, что не менее чем 10 пар шпионов донесли друг на друга.

Решение. Удобно рассуждать на соответствующем графе. Шпионы − вершины графа, пары шпионов − ребра графа. Всего ребер $\frac{20\cdot 19}{2}=190$. Донос шпиона А на шпиона В − это, скажем, раскрашивание ребра (А,В). Количество всех раскрашиваний равно, по условию $20\cdot 10=200$. Количество раскрашиваний превышает количество ребер на 10. Это означает, что найдутся не менее 10 дважды раскрашенных ребра (ребро А,В) либо не раскрашено, либо раскрашено один раз, либо раскрашено дважды − как (А,В) и как (В,А). А это как раз то, что требовалось доказать.

11.5 Функция f и g определены на множестве всех целых чисел из промежутка $[-1000;1000]$ и принимают целые значения. Докажите, что для некоторого целого k число решений уравнения $f(x)-g(y)=k$ нечетно.

Решение: Для любого k обозначим через M_k множество всех пар (x,y), $-1000\le x,\ y\le 1000,\ x,y$ − целые, для которых $f(x)-g(y)=k$. Число непустых множеств M_k, очевидно, конечно. Пусть m_k − число элементов множества M_k. Заметим, что множества M_k не пересекаются, а каждая пара (x,y), $-1000\le x,\ y\le 1000,\ x,y$ − целые, попадает в некоторое M_k. Число всевозможных пар (x,y) такого рода равно 2001^2. Поэтому $\sum_k m_k=2001^2$. Число 2001^2 нечетно. Следовательно, в указанной сумме должны быть нечетные слагаемые.