11 класс

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{11x-y}-\sqrt{y-x}=1, \\ 7\sqrt{y-x}+6y-26x=3. \end{cases}$

Решение. Введем новые переменные $u=\sqrt{11x-y}$ и $v=\sqrt{y-x}$, $u\ge 0$, $v\ge 0$. Тогда

$$\begin{cases} 11x-y=u^2, \\ y-x=v^2, \end{cases} \quad \begin{cases} x=0,1\left(u^2+v^2\right), \\ y=0,1\left(u^2+11v^2\right), \end{cases}$$

И, кроме того, $6y-26x=-2\left(11x-y\right)+4\left(y-x\right)=-2u^2+4v^2$. Теперь в новых переменных система примет вид

$$\begin{cases} u\ge 0, \ \ v\ge 0, \\ u-v=1, \\ 7v+4v^2-2u^2=3, \end{cases} \quad \begin{cases} u\ge 0, \ \ v\ge 0, \\ u=v+1, \\ 2v^2+3v-5=0. \end{cases}$$

Из последнего уравнения системы получаем $v=\dfrac{-3\pm 7}{4}$, т.е. $\begin{cases} v=1, \\ u=2, \end{cases}$ следовательно, $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}, \\ y=\dfrac{3}{2}. \end{cases}$

Ответ: $\left(0,5;\ 1,5\right)$.

2. Функция $y=f(x)$ такова, что для всех значений x выполняется равенство $f(x+1)=f(x)+2x+3$. Известно, что $f(0)=1$. Найдите $f(2018)$.

Решение. Перепишем условие задачи в виде $f(x+1)–f(x)=2x+3$. Подставляя последовательно вместо x числа 0, 1, 2,…, 2017, получим следующие равенства

$$f(1)-f(0)=2\cdot 0+3,$$
$$f(2)-f(1)=2\cdot 1+3,$$
$$f(3)-f(2)=2\cdot 2+3,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$f(2018)-f(2017)=2\cdot 2017+3.$$

Сложим почленно эти равенства: $f(2018)–f(0)=2\cdot(0+1+2+\ldots+2017)+3\cdot 2018$. Используя формулу для нахождения суммы арифметической прогрессии, получим

$$f\left(2018\right)=1+2\cdot\frac{1+2017}{2}\cdot 2017+3\cdot 2018=1+2018\cdot 2017+3\cdot 2018=$$
$$=1+2\cdot 2018+2018^2=2019^2=4076361.$$

Ответ: 2019^2 или 4076361.

3. Двадцать одна девочка и двадцать один мальчик принимали участие в математическом конкурсе. Каждый участник решил не более шести задач. Для любых девочки и мальчика найдётся хотя бы одна задача, решённая обоими. Докажите, что была задача, которую решили не менее трёх девочек и не менее трёх мальчиков.

Решение. Предположим, что нашлась задача, которую решили не более двух девочек или не более двух мальчиков. Будем считать задачу «красной», если её решили не более двух девочек и «чёрной» в противоположном случае (тогда её решили не более двух мальчиков).

Представим шахматную доску с 21-й строкой, каждая из которых соответствует девочке, и 21-м столбцом, каждый из которых соответствует мальчику. Тогда каждая клетка соответствует паре «мальчик–девочка». Каждую клетку покрасим в цвет какой-нибудь задачи, которую решили и мальчик-строка и девочка-столбец.

По принципу Дирихле в каком-нибудь столбце найдётся 11 чёрных клеток, или в какой-нибудь строке найдутся 11 красных клеток (потому что иначе получится, что всего клеток не более чем $21\times10+21\times10<21^2$). Рассмотрим, например, девочку-строку, содержащую хотя бы 11 чёрных клеток. Каждой из этих клеток соответствует задача, решённая максимум двумя мальчиками. Тогда мы можем указать не менее 6 различных задач, решённых этой девочкой. В силу первого условия никаких других задач девочка не решала, но тогда максимум 12 мальчиков имеют общие решённые задачи с этой девочкой, что противоречит второму условию.

Точно также разбирается случай, если в каком-нибудь столбце найдутся 11 красных клеток.

4. Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми равно 10 км, в 7.00 выехал автомобиль. Проехав 2/3 пути, автомобиль миновал пункт С, из которого в этот момент в пункт А выехал велосипедист. Как только автомобиль прибыл в В, оттуда в обратном направлении сразу же выехал автобус и прибыл в пункт А в 9.00. В скольких километрах от В автобус догнал велосипедиста, если велосипедист прибыл в пункт А в 10.00 и скорость каждого участника движения постоянна?

Решение. Пусть $v_а$ – скорость автомобиля, $v_в$ – скорость велосипедиста, $v_{ав}$ – скорость автобуса. Из условия задачи вытекает система следующих уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{20/3}{v_а}+\dfrac{20/3}{v_в}=3, \\ \dfrac{10}{v_а}+\dfrac{10}{v_{ав}}=2. \end{cases}$$

Требуется найти $\dfrac{\dfrac{10}{3}+\dfrac{10}{3v_а}v_в}{v_{ав}-v_в}v_{ав}=\dfrac{\dfrac{10}{3v_в}+\dfrac{10}{3v_а}}{1/v_в-1/v_{ав}}.$ (*)

Из системы уравнений получаем

$$\begin{cases} \dfrac{10}{3v_а}+\dfrac{10}{3v_в}=\dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{10}{3v_а}+\dfrac{10}{3v_{ав}}=\dfrac{2}{3}, \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{10}{3v_а}+\dfrac{10}{3v_в}=\dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{10}{3v_в}-\dfrac{10}{3v_{ав}}=\dfrac{5}{6}, \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{10}{3v_а}+\dfrac{10}{3v_в}=\dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{1}{v_в}+\dfrac{1}{v_{ав}}=\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Подставим полученные значения в выражение (*), получим $\dfrac{3/2}{1/4}=\dfrac{3}{2}\cdot4=6.$

Ответ: 6.

5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых сумма длин интервалов, составляющих решение неравенства

$$\frac{x^2+\left(2a^2+2\right)x-a^2+4a-6}{x^2+\left(a^2+5a-5\right)x-a^2+4a-6}<0,$$

не меньше 1.

Решение. Проанализируем графики функций, стоящих в числителе и знаменателе дроби. Пусть $y=f(x)$ – функция числителя, а $y=g(x)$ – функция знаменателя. Обе эти функции являются квадратными трехчленами, их графики – параболами. Задача сводится к неравенству $\frac{f(x)}{g(x)}<0$, т.е. к нахождению промежутков, в которых введенные функции имеют разные знаки. Ветви обеих парабол направлены вверх и

$$f(0)=g(0)=-\left(a^2-4a+6\right)=-\left(a-2\right)^2-2<0,$$

т.е. параболы пересекаются при $x=0$ и имеют по два различных корня. По теореме Виета для корней x_1 и x_2 уравнения $f(x)=0$ имеем

$$\begin{cases} x_1+x_2=-2\left(a^2+1\right)<0, \\ x_1\cdot x_2=-\left(a-2\right)^2-2<0. \end{cases}$$

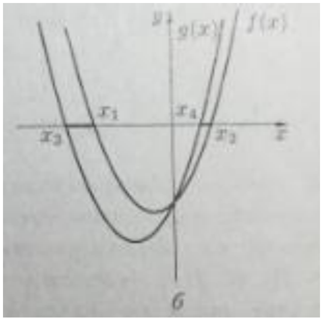
Следовательно, уравнение имеет корни разных знаков, причем отрицательный корень больше по модулю.

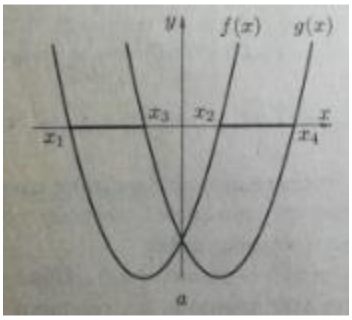
Аналогично для корней x_3 и x_4 уравнения $g(x)=0$ имеем

$$\begin{cases} x_3+x_4=-\left(a^2+5a-5\right)=-\left(a-\frac{\sqrt{45}-5}{2}\right)\cdot\left(a-\frac{\sqrt{45}+5}{2}\right), \\ x_3\cdot x_4=-\left(a-2\right)^2-2<0, \end{cases}$$

т.е. корни этого уравнения имеют разные знаки, однако знак их суммы не определен.

Расположение парабол может быть двух видов





Рассмотрим разность $f(x)-g(x)=x\left(a^2-5a+7\right)$. Так как $a^2-5a+7>0$, то для любого a знак разности $f(x)-g(x)$ совпадает со знаком x, поэтому параболы расположены так, как изображено на рисунке а).

Решением неравенства является объединение промежутков $\left(x_1;\ x_3\right)$ и $\left(x_2;\ x_4\right)$, сумма длин которых равна $x_3-x_1+x_4-x_2=\left(x_3+x_4\right)-\left(x_1+x_2\right)=a^2-5a+7$.

По условию задачи это число не меньше 1, следовательно, $a^2-5a+6\geq 0$, т.е. $a\in\left(-\infty;\ 2\right]\cup\left[3;+\infty\right)$.

Ответ: $a\in\left(-\infty;\ 2\right]\cup\left[3;+\infty\right)$.