

5 класс

1. Каких двузначных чисел больше: тех, у которых обе цифры одной чётности, или тех, у которых они разной чётности?

Ответ: Чисел поровну.

Решение. Все двузначные числа разбиваются на девять десятков. В каждом десятке с одинаковой цифрой десятков по пять чисел каждого вида. Значит, в итоге, чисел этих видов поровну.

Критерии. Только ответ: 0 баллов.

2. Имеется семь гирь весом 1 г, 2г, ..., 7г. Сколькими различными способами можно их все выложить на весы, чтобы наступило равновесие?

Ответ: четыре.

Указания. Общий вес всех гирь равен 28 г. Значит, на каждой чашке должно быть по 14г. Рассмотрим чашку, на которой лежит гиря в 7г. Остальные гири на этой чашке должны в сумме давать семь грамм. Если их две, то три варианта лежащих на чашке с 7: 1+6, 2+5, 3+4. Если гиря три, то среди них не может быть 6 и 5. Значит, есть 4г, остальные две дают в сумме 3г и, значит, могут быть 2+1. Других вариантов нет, поскольку есть только одна гиря в 7г, а сумма даже четырёх самых легких $1+2+3+4=10$ г.

Критерии. Указание четырёх способов без объяснения, что других нет: 3 балла.

Перемена местами левой и правой чашек не является новым способом, за это оценка не снижается и не повышается.

3. Можно ли шарики восьми цветов разложить в пять коробок, стоящих по кругу, так, чтобы в каждой коробке было три шарика разного цвета, и в соседних коробках не встречались два шарика одного цвета?

Ответ: можно.

Указания. Среди 15 шариков, разложенных по коробкам, трех шариков одного цвета быть не может, поскольку рядом шарики одного цвета не лежат, и коробок потребуется не менее шести. Значит, у нас шарики семи цветов по два и один шарик восьмого цвета. Для удобства будем нумеровать цвета числами от 1 до 8.

-1, 3, 5 - 2, 4, 6 - 1, 5, 7 - 2, 3, 8 - 4, 6, 7 –

Критерии. Ответ без примера: 0 баллов.

4. В комнате в ряд стоят 13 стульев. Три ювелира садятся на три соседних стула, и средний прячет алмаз в стул, на котором он сидит. У инспектора есть шесть детекторов, которые показывают, сидели на стуле или нет. Может ли он разместить детекторы на стульях до посещения ювелиров так, чтобы по их показаниям определить, где находится алмаз?

Ответ: может.

Указание. Расположение: с с д д с с д д с с (с – стул без детектора, д – стул с детектором). Поскольку нет трёх пустых (без детекторов) стульев подряд, то хотя бы один из детекторов работает. Если сработал один, то сидели на стуле со сработавшим детектором и на двух соседних с ним без детекторов. Если сработали два, то сидели на этих стульях и соседнем с ними без детектора. Если сработали три, то сидели на этих. Зная стулья, на которых сидели, выбираем средний из них.

Критерии. Правильное расположение детекторов без пояснения как находить стулья, на которых сидели: 5 баллов.

5. Имеется 100 шариков двадцати разных цветов по пять каждого цвета. Их разложили в 41 коробку так, что в каждой коробке не менее двух шариков. Доказать, что есть коробка, в которой все шарики различных цветов.

Указания. Если в коробке есть два шарика одного цвета, то приклеим к ней бумажку такого же цвета. Для каждого цвета

можно приклеить не более двух бумажек. Значит, наклеено не более $20 \cdot 2 = 40$ бумажек. А коробок 41. Значит, есть коробка, на которую не наклеена бумажка, и в ней нет одинаковых шариков.

Критерии. Рассмотрение частных случаев или ссылки на самый худший случай: 0 баллов.

6. В выражении $1002 * 2 * 3 * 4 * \dots * 12 * 13$ звездочка заменяет знак плюс или минус. За одну операцию можно поменять на противоположные 2 знака, между которыми есть одно число с одной или двумя цифрами. Доказать, что после нескольких таких операций можно получить выражение, значение которого кратно 13.

Указания. Если между 1002 и 2 стоит плюс, то ничего не делаем, иначе применяем операцию для знаков соседней цифры 2. В результате между 1002 и 2 получим знак плюс. Далее получим между 2 и 3 знак плюс и т.д. В итоге будут все плюсы или последний минус. В обоих случаях значение выражения равно $1092 = 1001 + 91 = 13 \cdot 77 + 13 \cdot 7$ или $1066 = 1001 + 65 = 13 \cdot 77 + 13 \cdot 5$ и кратно 13.

Критерии. Утверждается, что всё сводится к выражению, в котором все знаки плюсы, и частично показан этот процесс: 3 балла.