7 класс

7.1. Расставьте по кругу 6 ненулевых цифр (не обязательно различных) так, чтобы каждая из них равнялась последней цифре суммы своих соседей.

Решение. Например, $-4-2-8-6-8-2-$.

Замечание. Существуют и другие примеры.

Комментарий. Любой верный пример — 7 баллов.

7.2. Петя, Коля и Вася собирали грибы. Петя сказал, что он нашёл на 7 грибов меньше, чем суммарно нашли Коля и Вася, а Коля сказал, что он нашёл на 10 грибов меньше, чем суммарно нашли Петя и Вася. Докажите, что кто-то из ребят ошибся.

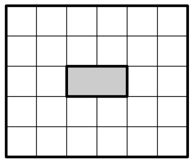
Первое решение. Предположим, что никто из ребят не ошибся. Раз Петя нашел на нечётное число 7 меньше грибов, чем Коля и Вася нашли вместе, то количество грибов, собранных Петей, и количество грибов, собранных вместе Колей и Васей — разной чётности. Но тогда общее число собранных грибов нечётно. Аналогично рассуждая, получаем, что количества грибов, собранных Колей, и Петей вместе с Васей — одной чётности. Но тогда общее количество собранных грибов чётно. Противоречие.

Второе решение. Пусть Петя нашел p грибов, Вася — v грибов, а Коля — k грибов. Тогда выполняются равенства $p = k + v - 7$, $k = p + v - 10$. Сложив эти равенства, получим $2v = 17$, что невозможно.

Комментарий. В предположении противного доказано только, что общее количество грибов чётно — 3 балла.

В предположении противного доказано только, что общее количество грибов нечётно — 3 балла.

7.3. Из клетчатого прямоугольника 6×5 вырезали в центре прямоугольник 2×1, как показано на рисунке. Можно ли получившуюся фигуру разрезать на 6 треугольников?



Ответ. Можно.

Решение. Один из примеров разрезания показан на рис. 1.

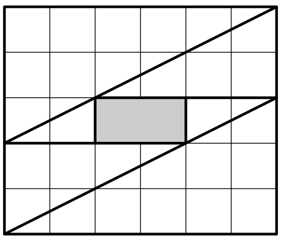


Рис. 1

Комментарий. Любой верный пример — 7 баллов.

7.4. В десятичной записи 13 чисел используется одна и та же цифра N и не используются никакие другие цифры. Может ли сумма этих чисел равняться 8900098?

Ответ. Не может.

Решение. Предположим, что сумма могла равняться 8900098. У каждого из слагаемых одна и та же последняя цифра N. Значит, последняя цифра суммы равна последней цифре числа $13N$. Отсюда следует, что $N = 6$. Но тогда каждое из слагаемых делится на 6, то есть делится на 3. Следовательно, и сумма всех чисел делится на 3. Но по признаку делимости на 3 число 8900098 на 3 не делится. Противоречие.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

Доказано, что $N = 6$ — 3 балла.

7.5. По кругу стоят 100 человек, каждый из которых либо рыцарь, либо лжец (лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду). Каждый из стоявших сказал: «У меня есть сосед лжец». Найдите минимальное возможное число лжецов среди этих 100 человек.

Ответ. 34.

Решение. Заметим, что 3 рыцаря не могут стоять рядом, так в этом случае средний рыцарь солгал бы. Значит, среди любых 3 стоящих подряд человек есть лжец. Возьмем какого-нибудь лжеца, а остальных 99 человек разобьем на 33 тройки стоящих рядом. Так как в каждой тройке есть хотя бы один лжец, общее число лжецов в круге не меньше $1 + 33 = 34$.

Ровно 34 лжеца могут стоять, например, так: –Л(РЛР)(РЛР)... (РЛР)–.

Комментарий. Доказано только, что лжецов не меньше 34 — 4 балла.

Только приведён пример расстановки с 34 лжецами — 2 балла.