8-й класс

8.1 Какая из дробей ближе к 1 – правильная или обратная к ней неправильная?

Решение: Пусть $\frac{p}{q}$ – правильная дробь, $p,q \in N$, $p<q$, тогда $\frac{q}{p}$ – обратная к ней неправильная. Расстояние между дробью $\frac{p}{q}$ и 1 равно $1-\frac{p}{q}=\frac{q-p}{q}$. Расстояние между дробью $\frac{q}{p}$ и 1 равно $\frac{q}{p}-1=\frac{q-p}{p}$. Так как $q>p$, то $\frac{q-p}{q}<\frac{q-p}{p}$. Таким образом, дробь $\frac{p}{q}$ ближе к 1, чем дробь $\frac{q}{p}$.

8.2 В классе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеют по 3 друга (в этом классе), 11 – по 4 друга, а 10 – по 5 друзей?

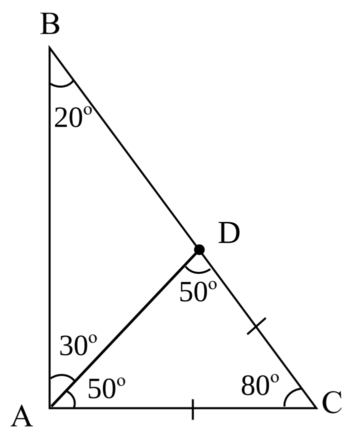
Ответ: не может

Решение: Допустим, что может. Рассмотрим соответствующий граф: 30 точек на плоскости (вершины графа) и отрезки, соединяющие некоторые вершины (ребра графа). Подсчитаем количество всех ребер: $(3\cdot 9+4\cdot 11+5\cdot 10)\cdot\frac{1}{2}=\frac{121}{2}$ – нецелое число, чего быть не может. Отметим, что деление на 2 объясняется тем, что при подсчете каждое ребро учитывалось дважды (как выходящее из одной вершины, так и из другой). Итак, ответ: не может.

8.3 Рассматривается равнобедренный треугольник с углом 20° при вершине. Докажите, что боковая сторона больше удвоенного основания.

Решение: См.рис.

Опираемся на то, что в треугольнике против большего угла лежит большая сторона.
Доп. построение: CD=CA.
Тогда появляются углы по 50° (см.).
Из треугольника ABD находим $BD > AD$.
Из треугольника ADC находим $AD > AC$.
Следовательно, $BD > AC$. И наконец
$BC = BD + DC > AC + DC = AC + AC = 2AC.$



8.4 Незнайка написал на доске несколько различных натуральных чисел и поделил (в уме) сумму этих чисел на их произведение. После этого Незнайка стер самое маленькое число и поделил (опять в уме) сумму оставшихся чисел на их произведение. Второй результат оказался в 3 раза больше первого, Какое число Незнайка стер?

Решение: Пусть m − стертое число, S − сумма, а P − произведение нестертых чисел. По условию

$$\frac{S}{P} = 3\frac{S+m}{Pm}.$$

Преобразуем полученное равенство: $3m = (m-3)S$. Отсюда $m-3>0$, т.е. $m \geq 4$. Кроме того, поскольку $S > m$ (по условию m − наименьшее из чисел, а в сумму S входит хотя бы одно число − большее m), то $3m > (m-3)\cdot m$, т.е. $6 > m$, т.е. $m \leq 5$. Итак, возможные варианты: $m = 4$ или $m = 5$.

В случае $m = 5$ получаем $3 \cdot 5 = (5-3)\cdot S$, что дает для S дробное значение; значит, этот случай отпадает. В случае $m = 4$ получаем $3\cdot 4 = (4-3)\cdot S$, т.е. $S = 12$. Этот случай реализуется для набора чисел 4,5,7.

8.5 В классе учатся 35 школьников, они изучают 10 предметов. После выставления годовых оценок оказалось, что средний балл по каждому предмету больше $4\frac{2}{3}$. Докажите, что хотя бы 5 школьников закончили год без двоек и единиц.

Решение: Сколько школьников могли получить по предмету двойку или единицу? Оказывается, не более трех. В самом деле, предположим, что есть четыре школьника с такими плохими оценками. Тогда сумма оценок, полученных по этому предмету всеми школьниками, не больше, чем $31\cdot 5 + 4\cdot 2 = 163$, а , следовательно, средний балл не превосходит $\frac{163}{35} = 4\frac{23}{35}$, что меньше, чем $4\frac{2}{3}$, т.к $\frac{23}{35} < \frac{2}{3}$. Итак, по каждому предмету не больше трех школьников получили двойку или единицу. Поэтому всего двоек и единиц поставлено не больше $3\cdot 10 = 30$. Следовательно, хотя бы 5 школьников закончили год без двоек и единиц.