Муниципальный этап Всероссийской олимпиады по математике
2018-2019 уч.год

8 класс

Решения и ответы

1. В таблице 3×3 расставьте числа 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 так, чтобы произведение чисел в первом столбце равнялось бы произведению чисел в первой строке, произведение чисел во втором столбце равнялось бы произведению чисел во второй строке и произведение чисел в третьем столбце равнялось бы произведению чисел в третьей строке.
Решение.

7	3	8
6	9	5
4	10	11

Достаточно привести требуемую расстановку. Принципиальным является размещение 7, 9, 11 на диагонали. Возможны соотвествующие перестановки столбцов и строк.
Ответ. См. рис.

2. Существуют ли 2018 пар натуральных чисел $(x; y)$, которые одновременно удовлетворяют условиям: 1) в каждой паре x и y не совпадают; 2) в каждой следующей паре число x на 1 больше числа x предыдущей пары; 3) в каждой следующей паре число y на 1 больше числа y предыдущей пары; 4) в каждой паре x делится на y?
Решение. Такие пары существуют. Достаточно привести пример.

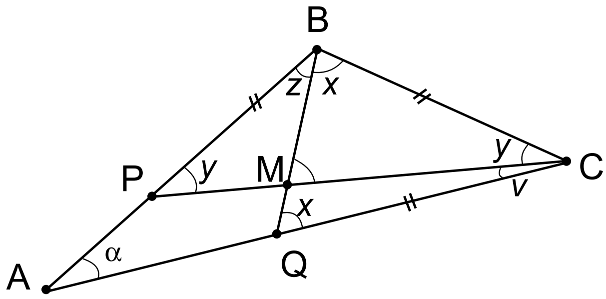
$$(2018! + 1; 1),\ (2018! + 2; 2),\ (2018! + 3; 3),\ \ldots,\ (2018! + 2018; 2018)$$

Ответ. Существуют.

3. В треугольнике ABC угол A равен α, BC – наименьшая сторона. На стороне AB отмечена точка P и на стороне AC отмечена точка Q так, что $PB = BC = CQ$. Отрезки BQ и CP пересекаются в точке M. Найдите величину угла BMC.
Решение.

Треугольники PBC и QBC – равнобедренные, соответствующие стороны отмечены на рисунке. Обозначим углы: $\angle QBC = \angle BQC = x$, $\angle PBC = \angle BPC = y$, $\angle ABQ = z$, $\angle ACP = v$. По свойству внешнего угла, примененному к треугольникам ABQ и APC,

$$\begin{cases} \alpha + z = x, \\ \alpha + v = y. \end{cases}$$



Напишем сумму углов треугольника ABC

$$\alpha + z + x + y + v = 180^\circ$$

Из системы выразим $z + v$.

$$z + v = x + y - 2\alpha$$

Отсюда $\alpha + 2x + 2y - 2\alpha = 180^\circ, \quad x + y = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha.$
Находим искомый угол

$$\angle BMC = 180^\circ - (x + y) = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$$

Ответ.$90^\circ - \frac{1}{2}\alpha.$

4. Фирма называется публичной, если ее акциями владеет не менее 15 акционеров. Акционер фирмы называется миноритарием, если он владеет не более, чем 25% акций этой фирмы. На бирже, где проходят торги акциями, шестая часть фирм – публичные. Докажите, что среди всех акционеров, участвующих в торгах на бирже, не менее 20% – миноритарии. При проведении биржевых торгов считается, что каждый акционер владеет акциями только одной фирмы.
Решение. Пусть число фирм на бирже равно N. Назовем акционера, который владеет более, чем 25% акций фирмы, настоящим акционером. Число настоящих акционеров одной фирмы не может быть более трех. (Если их четверо, то какому-то одному из них не может достаться более 25% акций). Поэтому число всех настоящих акционеров на бирже не может превышать 3N. Теперь рассмотрим публичную фирму. Среди ее акционеров – не более трех настоящих. Значит, среди акционеров публичной фирмы не менее 12 – миноритарии. Число миноритариев на бирже не менее, чем $12 \cdot \frac{1}{6}N$, т.е. не менее 2N. Итак, число миноритариев не менее 2N, число настоящих акционеров не более 3N, значит, миноритарии составляют не менее одной пятой, т.е. не менее 20%.

5. Может ли квадрат какого-нибудь натурального числа оказаться наименьшим общим кратным двух подряд идущих натуральных чисел? Обоснуйте свой ответ.
Решение. Нет, НОК подряд идущих чисел не может оказаться квадратом натурального числа. Заметим, что два подряд идущих числа, n и $n+1$, являются взаимно простыми. (Этот факт считается известным, и при необходимости доказывается так: если n имеет делитель d, $d > 1$, то $n+1$ не может иметь

делитель d, так как 1 не делится на d.) Поэтому все простые числа, входящие в разложение n на простые множители, не могут входить в разложение $n+1$, и наоборот. Значит, НОК$(n, n+1)$ равен произведению $n \cdot (n+1)$. Если бы НОК был бы равен квадрату какого-либо числа, то все простые множители, входящие в НОК, входили бы в четной степени. Поэтому каждое из чисел n и $n+1$ являлось бы квадратом, а это невозможно – двух подряд идущих квадратов не существует. (Действительно, в разложении $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ по крайней мере один множитель больше 1.)
Ответ. Не может.

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады по математике
2018-2019 уч.год

8 класс

Критерии проверки

Задача 1

Балл	За что ставится
7	Полное решение, приведена верная расстановка.
3	Приведена расстановка, содержащая явную арифметическую (не логическую) ошибку.
0	Неверное решение, расстановка не приведена.

Задача 2

Балл	За что ставится
7	Полное решение, приведен верный пример.
4	Приведен пример, содержащий арифметическую ошибку.
3	Пример не приведен. Имеются полностью верные рассуждения, описывающие принцип построения примера, позволяющие довести до конца его построение.
0	Неверный ответ. Отсутствие правильного примера.

Задача 3

Балл	За что ставится
7	Полностью верное решение. Правильный ответ.
5	Верное решение, содержащее арифметическую ошибку в вычислении углов.
3	Доказано существование двух равнобедренных треугольников. Имеется попытка использовать теорему о внешнем угле треугольника.
2	Доказано существование двух равнобедренных треугольников.
1	Приведен правильный ответ, но решение содержит неверные рассуждения. Или приведено решение в частном случае, например, правильного треугольника.
0	Неверное решение.

Задача 4

Балл	За что ставится
7	Полностью верное решение. Правильный ответ.
5	Верное решение, содержащее арифметическую ошибку. Отсутствуют ошибки в действиях с неравенствами.
4	Получена верная оценка для числа настоящих акционеров всех фирм и получена верная оценка числа всех миноритариев.
3	Или получена верная оценка для числа настоящих акционеров всех фирм, или получена верная оценка числа всех миноритариев.
2	Получена верная оценка для числа настоящих акционеров одной фирмы.
1	Приведено решение в частном случае, на примере конкретного числа фирм и акционеров.
0	Неверное решение.

	Балл	За что ставится
Задача 5	7	Полностью верное решение. Правильный ответ. Сформулировано, но, возможно, не доказано утверждение, что двух подряд идущих квадратов не существует.
	6	Верное решение. В рассуждениях вместо четных степеней учитываются вторые степени.
	5	Верное решение, недостаточно обоснованное. Подразумевается использование утверждений, что два подряд идущих числа взаимно просты и что двух подряд идущих квадратов не существует. Явная формулировка хотя бы одного из этих утверждений не приведена.
	3	Сделана попытка рассмотреть разложение на простые множители, указан какой нибудь один верный факт, например, что все множители в НОК входят в четных степенях.
	1	Приведено решение в частном случае, на примере двух конкретных чисел.
	0	Неверное решение, или неверный ответ, или написан только верный ответ, без доказательства.