8 класс

1. Число $\frac{100!}{6^{100}}$ записали в виде несократимой дроби ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$). Найдите ее знаменатель.

Решение. $\frac{100!}{6^{100}} = \frac{100!}{2^{100} \cdot 3^{100}}$. Среди 100 чисел ровно 50 делятся на 2, ровно 25 делятся на 4, ровно 12 делятся на 8, ровно 6 делятся на 16, 3 на 32 и 1 на 64. Итого набирается 97 двоек. Аналогично с 3: 33 числа делятся на 3, 11 на 9, 3 на 27 и 1 на 81. Итого 48 троек. Следовательно, после сокращения получим в знаменателе число $2^3 \cdot 3^{52}$.

Ответ: $2^3 \cdot 3^{52}$.

2. Сократите дробь: $\frac{x^{14} + x^{13} + \ldots + x + 1}{x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x}$.

Решение. Воспользуемся формулой

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b + \ldots + a^2 b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

для преобразования данного выражения:

$$\frac{x^{14} + x^{13} + \ldots + x + 1}{x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x} = \frac{(x-1)\left(x^{14} + x^{13} + .. + x + 1\right)}{(x-1)\left(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x\right)} = \frac{x^{15} - 1}{x(x-1)\left(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\right)} = \frac{x^{15} - 1}{x\left(x^5 - 1\right)} =$$

$$= \frac{\left(x^5\right)^3 - 1}{x\left(x^5 - 1\right)} = \frac{\left(x^5 - 1\right)\left(x^{10} + x^5 + 1\right)}{x\left(x^5 - 1\right)} = \frac{x^{10} + x^5 + 1}{x}.$$

Ответ: $\frac{x^{10} + x^5 + 1}{x}$.

3. Из сосуда, содержащего 5л 6%-го раствора кислоты, отлили 1л, после чего добавили 2 л воды. Найдите концентрацию получившегося раствора.

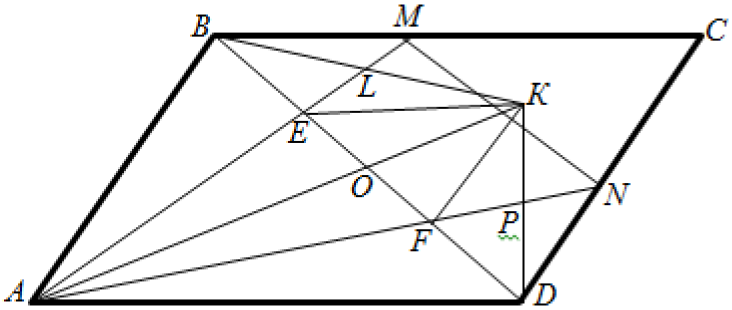
Решение. После того как отлили 1 л. в сосуде осталось 4 л. раствора, при этом кислоты осталось $4 \cdot 0,06 = 0,24$ л. После добавления двух литров воды объем раствора стал равен 6 литрам, а количество кислоты не изменилось. Таким образом, концентрация кислоты стала равна $0,24 : 6 = 0,04$.

Ответ: 0,04.

4. На сторонах *BC* и *CD* параллелограмма *ABCD* взяты точки *M* и *N* соответственно. Диагональ *BD* пересекает стороны *AM* и *AN* треугольника *AMN* соответственно в точках *E* и *F*, разбивая его на две части. Докажите, что эти части имеют одинаковые площади тогда и только тогда, когда точка *K*, определяемая условиями *EK*||*AD*, *FK*||*AB*, лежит на отрезке *MN*.

Решение. Соединим точку *K* с точками *A*, *B* и *D*, обозначив через *O*, *L*, *P* точки пересечения *KA* и *BD*, *KB* и *AM*, *KD* и *AN* соответственно (см. рисунок). Диагональ *BD* разрезала треугольник *AMN* на две части. Сравним их.

Заменим треугольник *AFE* на равную ему по площади фигуру, находящуюся по другую сторону диагонали *BD*.



Отметим, что если у треугольников равные стороны и равные высоты, проведенные к ним, то они имеют равные площади. Кроме того, если треугольники наложены один на другой, то выбрасывая из них общую часть, мы получаем фигуры равной площади.
Заметим, что $FK||AB$, значит, треугольники с общей стороной AB и высотой равной расстоянию между этими параллельными прямыми будут иметь равные площади. Это треугольники AFB и AKB. Треугольник AOB в них общий, следовательно, выкинув его, мы получим что $S_{AFO} = S_{OBK}$.
Аналогично рассуждая с другой парой параллельных прямых, получим $S_{AOE} = S_{DOK}$. Итак, треугольник AFE можно заменить на треугольник DKB.
Перенесем еще маленькие треугольники DPF и BEL поближе к K, сохраняя их площади. Принцип тот же самый: меняем треугольник на треугольник равной площади, используя общую сторону и равные высоты. Тогда треугольник DFP по площади равен треугольнику NPK, а треугольник BEL равен по площади треугольнику LMK.
Итак, от треугольника DKB мы перешли к равной по площади фигуре $FNKME$. Эта фигура включает в себя полностью четырехугольник $FNME$, значит, она равна ему по площади тогда и только тогда, когда $K \in MN$.

5. Петя и Вася сделали в тире по 5 выстрелов. Первыми тремя выстрелами они выбили поровну, а последними тремя Петя выбил в три раза больше очков, чем Вася. На мишени остались пробоины в 10, 9, 9, 8, 8, 5, 4, 4, 3, 2 очков. Куда попал каждый из них третьим выстрелом? Приведите все возможные варианты ответа и докажите, что других нет.

Решение. Последними тремя выстрелами Вася не мог выбить больше, чем 9 очков (иначе Петя бы выбил последними тремя выстрелами не меньше 30). Меньше 9 очков Вася тоже выбить не мог, так как наименьшая сумма за три выстрела 2+3+4=9. Следовательно, Вася выбил 2, 3 и 4 очка, а Петя 10, 9 и 8 очков (других вариантов для набора 27 очков тремя выстрелами нет). Значит, первыми двумя выстрелами мальчики выбили 9, 8, 5 и 4 очка. При этом Петя третьим выстрелом выбил не меньше, чем 8, а Вася – не больше, чем 4 очка. Так как сумма очков после первых трех выстрелов была равной, значит, первыми двумя выстрелами Петя выбил, по крайней мере, на четыре очка меньше, чем Вася. Единственная возможность: Вася выбил 9 и 8, а Петя 5 и 4 очка, следовательно, третьим выстрелом Вася выбил 2, а Петя 10 очков.

Ответ: третьим выстрелом Петя выбил 10, а Вася 2 очка.