

## 9-й класс

**9.1** Если  $x$  и  $y$  – положительные числа, то хотя бы одно из чисел  $x$ ,  $y$  и  $\frac{1}{x+y}$  больше 0,7. Докажите это.

**Решение:** Если  $x \leq 0,7$  и  $y \leq 0,7$ , то  $x+y \leq 1,4$  и  $\frac{1}{x+y} \geq \frac{1}{1,4} > 0,7$ .

**9.2** Каждые две из шести ЭВМ соединены проводом. Можно ли все эти провода раскрасить в пять цветов так, чтобы из каждой ЭВМ выходили пять проводов разного цвета?

**Ответ:** можно.

**Решение:** Расположим 6 точек (ЭВМ) в вершинах правильного шестиугольника. Его стороны закрасим через одну цветами 1 и 2, а диагонали – цветами 3,4,5. При этом диагонали закрашиваем таким образом: одним цветом две параллельные малые диагонали и перпендикулярную к ним большую. Т.о. ответ: можно.

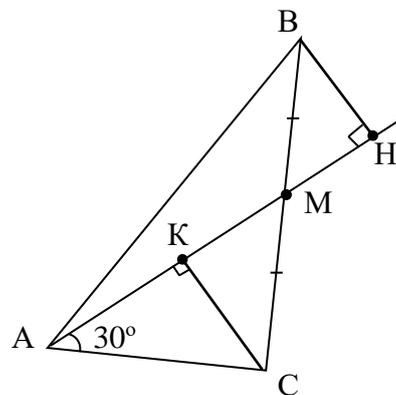
**9.3** В треугольнике ABC проведена медиана AM (точка M лежит на стороне BC). Известно, что угол САМ равен  $30^\circ$ , сторона AC равна 2. Найдите расстояние от точки B до прямой AC.

**Ответ:** 1.

**Решение:** См. рис.

Треугольник СКМ равен треугольнику ВМН (это – прямоугольные треугольники, гипотенузы CM и BM которых равны, и углы одинаковы).

Поэтому  $BH=CK$ . Но в треугольнике СКА катет СК лежит против угла  $30^\circ$  и равен половине гипотенузы AC:  $CK=1$ .



**9.4** Пусть  $a, b, c$  – различные целые числа. Известно, что уравнение  $(x+a)(x+b)(x+c)+5=0$  имеет целый корень. Докажите, что других целых корней у него нет.

**Решение:** Если  $x$  – целое число и  $(x+a)(x+b)(x+c)=-5$ , то непременно один из сомножителей равен 1, другой равен  $-1$ , третий 5. Но тогда

$$(x+a)+(x+b)+(x+c)=5,$$

$$3x=5-(a+b+c)$$

Отсюда  $x$  определяется единственным образом.

**9.5** Числа от 1 до 37 записали в строку так, что сумма любых первых нескольких чисел делится на следующее за ними число. Какое число стоит на третьем месте, если на первом месте написано число 37, а на втором 1?

**Решение:** Пусть  $a$  – число на последнем месте. Так как сумма всех предшествующих чисел делится на  $a$ , то и сумма всех 37 чисел делится на  $a$ . Подсчитаем сумму всех чисел:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 37 = \frac{1}{2}((1 + 37) + (2 + 36) + (3 + 35) + \dots + (37 + 1)) = \frac{1}{2}38 \cdot 37 = 19 \cdot 37.$$

Делители последнего числа в диапазоне от 1 до 37 – числа 1, 19, 37. Но 37 и 1 стоят на 1-м и 2-м местах, поэтому  $a = 19$ . Число, стоящее на 3-м месте, – это делитель числа  $37 + 1 = 38 = 2 \cdot 19$ , отличный от 1 и 19. Значит, это – число 2.