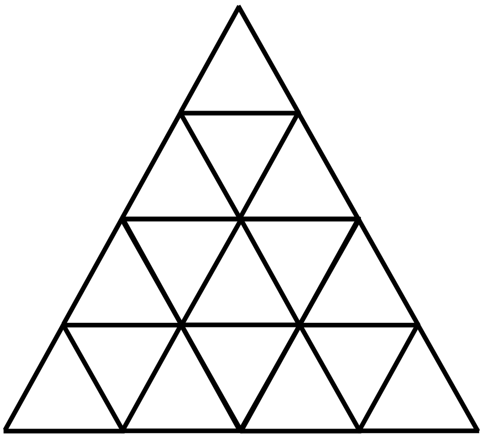
Муниципальный этап Всероссийской олимпиады по математике
2018-2019 уч.год

9 класс

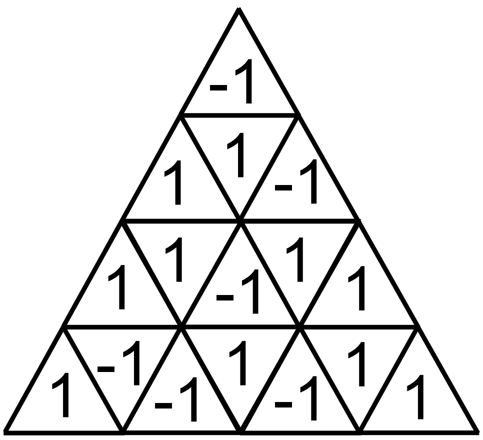
Решения и ответы

1. Саша, Женя и Валя сидят за треугольным столом, который расчерчен на маленькие треугольнички, как показано на рисунке.



Они заполняют все треугольнички числами -1 и 1. После заполнения всех треугольничков они вычисляют произведения чисел, стоящих в своих горизонтальных рядах и складывают получившиеся призведения. (У каждого человека, сидящего за столом, свое соответствующее направление горизонтали – параллельное стороне стола, обращенной к сидящему). Может ли окзаться, что при какой-то расстановке -1 и 1 Саша получит в сумме 4, Женя получит в сумме -4, а Валя получит в сумме 0?

Решение. Одна из возможных расстановок показана на рисунке. Необходимо



расставить -1 так, чтобы по одному направлению в каждом ряду они встречались бы четное число раз, по второму направлению в каждом ряду -1 встречались бы нечетное число раз, по третьему направлению в двух строках -1 стояли бы четное число раз, и в двух строках – нечетное число раз.

Ответ. Может.

2. Пусть a, b, c – положительные числа. Докажите неравенство

$$\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}\geq\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}$$

Решение. Воспользуемся неравенством между средним арифметическом и средним гармоническим. Известно, что для положительных x, y выполняется

$$\frac{x+y}{2}\geq\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$$

В нашем случае по очереди применяем это неравенство к парам $\left(x=\frac{1}{a},\, y=\frac{1}{b}\right)$; $\left(x=\frac{1}{b},\, y=\frac{1}{c}\right)$; $\left(x=\frac{1}{c},\, y=\frac{1}{a}\right)$.

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}\geq\frac{2}{a+b}$$

$$\frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{2}\geq\frac{2}{b+c}$$

$$\frac{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}{2}\geq\frac{2}{c+a}$$

Сложим эти три неравенства

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}+\frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{2}+\frac{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}{2}\geq\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}$$

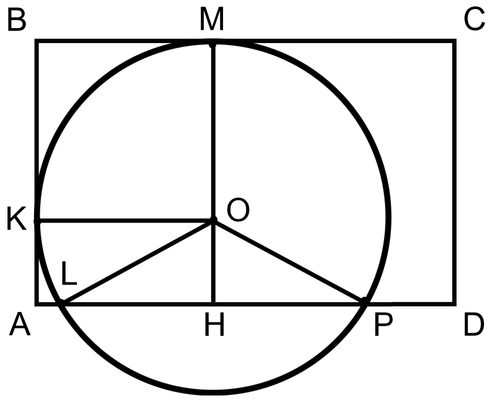
Остается поделить обе части неравенства на 2

$$\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}\geq\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}$$

Неравенство доказано. Оно получено как следствие неравенства о средних.

3. Окружность радиуса 26 касается двух смежных сторон прямоугольника, длины которых – 36 и 60. Найдите, на какие отрезки окружность делит стороны прямоугольника.
Решение.

Заметим, что радиус окружности больше половины короткой стороны прямоугольника, а диаметр окружности меньше его длинной стороны. Это означает, что окружность пересекает длинную сторону прямоугольника, противоположную касающейся, в двух точках, и не пересекает вторую короткую сторону. Обозначение точек показано на рисунке. Точки K и M – точки касания, радиусы OK и OM перпендикулярны сторонам прямоугольника. Так как $BMOK$ – квадрат, то отрезки BM и BK равны 26. В треугольнике OLH известны две стороны – гипотенуза OL равна 26 и катет OH равен 10. По теореме Пифагора находим катет LH, он равен 24. Отсюда отрезок AL равен 2, и отрезок LP равен 48. Окружность делит сторону AD на отрезки длиной 2, 48, 10.
Ответ. 26 и 34; 26 и 10; 2, 48 и 10.



4. Решите уравнение $n^4 - 2n^2 = m^2 + 38$, где n, m – целые числа.
Решение. Прибавим 1 к левой и правой части уравнения.

$$n^4 - 2n^2 + 1 = m^2 + 39$$

Свернем квадрат разности, перенесем m^2 в левую часть и разложим ее на множители.

$$(n^2 - 1)^2 - m^2 = 39$$

$$(n^2 - 1 - m) \cdot (n^2 - 1 + m) = 39$$

Получаем восемь возможностей, которые оформим в виде систем уравнений

$$\begin{cases} n^2 - m - 1 = 39, \\ n^2 + m - 1 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} n^2 - m - 1 = 1, \\ n^2 + m - 1 = 39, \end{cases} \quad \begin{cases} n^2 - m - 1 = 13, \\ n^2 + m - 1 = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} n^2 - m - 1 = 3, \\ n^2 + m - 1 = 13, \end{cases}$$

$$\begin{cases} n^2 - m - 1 = -39, \\ n^2 + m - 1 = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} n^2 - m - 1 = -1, \\ n^2 + m - 1 = -39, \end{cases} \quad \begin{cases} n^2 - m - 1 = -13, \\ n^2 + m - 1 = -3, \end{cases} \quad \begin{cases} n^2 - m - 1 = -3, \\ n^2 + m - 1 = -13. \end{cases}$$

Покажем, как сократить преобразования и избежать решения восьми систем. Пусть a и b – два целых парных делителя числа 39, т.е. $ab = 39$.
Из каждой системы $\begin{cases} n^2 - m - 1 = a, \\ n^2 + m - 1 = b, \end{cases}$ можно выразить n^2, сложив два уравнения

$$n^2 = \frac{a+b}{2} + 1$$

Очевидно, отрицательные пары a, b не дают решений для n^2. Всего, с учетом симметричности, существует две пары $a = 1$, $b = 39$ и $a = 3$, $b = 13$. Первая пара приводит к $n^2 = 21$, вторая пара приводит к $n^2 = 9$. Значение 21 не приводит к целому n. Подставим $n^2 = 9$ в исходное уравнение, получим $m^2 = 25$, $m = \pm 5$. $n^2 = 9$ приводит к $n = \pm 3$, выбор n не зависит от выбора m.
Ответ. $(-5; -3), (-5; 3), (5; -3), (5; 3)$.

5. Про три различных целых числа x, y, z известно, что xy делится на 576, yz делится на 324, xz делится на 5184. Делится ли $(x - y)(y - z)(z - x)$ на 48?
Решение.
$576 = 2^6 \cdot 3^2$, $324 = 2^2 \cdot 3^4$, $5184 = 2^6 \cdot 3^4$. Представим числа x, y, z в виде разложения на простые множители, выделив степени 2 и 3.
$x = x_0 \cdot 2^k \cdot 3^l$,

$y = y_0 \cdot 2^m \cdot 3^n$,
$z = z_0 \cdot 2^s \cdot 3^t$,
x_0, y_0, z_0 не делятся ни на 2, ни на 3. Получим попарные произведения
$xy = x_0 y_0 \cdot 2^{k+m} \cdot 3^{l+n}$,
$yz = y_0 z_0 \cdot 2^{m+s} \cdot 3^{n+t}$,
$xz = x_0 z_0 \cdot 2^{k+s} \cdot 3^{l+t}$,
Условие задачи приводит к двум системам неравенств, одной для степеней 2 и второй для степеней 3.

$$\begin{cases} k+m \geq 6, \\ m+s \geq 2, \\ k+s \geq 6, \end{cases} \qquad \begin{cases} l+n \geq 2, \\ n+t \geq 4, \\ l+t \geq 4. \end{cases}$$

Показатели степеней – неотрицательные целые числа. Первая система допускает два случая. Первый случай – в неравенстве $m+s \geq 2$ одна из переменных равна 0, например, s. Тогда $m \geq 2$, $k \geq 6$. При таких значениях $k - s \geq 6$, и $(x-z)$ делится на 2^6 (нам достаточно делимости на 2^4). Второй случай – в неравенстве $m+s \geq 2$ про обе переменных можно сказать только, что $m \geq 1$, $s \geq 1$. Это значит, что каждая из величин x, y, z делится на 2. Если две из этих перемнных делятся на 4, произведение $(x-y)(y-z)(z-x)$ делится на 2^4. Остается рассмотреть $m = 1$, $s = 1$. Делимость каждой из переменных x, y, z на 2 приводит к делимости произведения этих скобок на 8. Вынесем 2 за скобку в разности $(x - z)$. Остается разность двух нечетных чисел, она четна и дает четвертую двойку. Итак, во всех случаях $(x - y)(y - z)(z - x)$ делится на 16. Докажем делимость этого произведения на три, рассмотрев вторую систему неравенств. При l или n, равном 0, вторая из этих переменных не меньше 2, t не меньше 2, и разность $(x - y)(y - z)(z - x)$ делится на 9. Если ни одна из переменнх l, n, t не равна 0, то каждая из переменных x, y, z делится на 3, и произведение $(x - y)(y - z)(z - x)$ делится на 3. Тем самым доказано, что произведение $(x - y)(y - z)(z - x)$ делится на 48.
Ответ. Делится.

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады по математике
2018-2019 уч.год

9 класс

Критерии проверки

Задача 1

Балл	За что ставится
7	Полное решение, приведена верная расстановка.
2	Приведена расстановка, содержащая явную арифметическую (не логическую) ошибку.
0	Неверное решение, расстановка не приведена, или условие задачи понято неверно.

Задача 2

Балл	За что ставится
7	Полностью верное решение.
5	Верное решение, содержащее арифметическую ошибку. Отсутствуют ошибки в действиях с неравенствами.
2	Выполнена попытка использовать неравенство о средних, отсутствует дальнейшее продвижение.
0	Неверное доказательство. В частности, ошибка в выборе исходного утверждения и следствия из него, или ошибка в действиях с неравенствами.

Задача 3

Балл	За что ставится
7	Полностью верное решение. Правильные ответы.
5	Верное решение, содержащее арифметическую ошибку.
1	Найдены только две пары длин отрезков 26 и 10; 26 и 34.
0	Неверное решение, или неверно выполненный рисунок, не учитывающий соотношение между радиусом окружности и сторонами прямоугольника.

Задача 4

Балл	За что ставится
7	Полностью верное решение. Правильный ответ. Или явно решены все системы уравнений, или обосновано исключение из рассмотрения отдельных систем.
5	Верное решение, недостаточно обоснованное. Или не приводится решение всех систем, при этом отсутствуют верные обоснования, почему отдельные системы не рассмотрены.
3	Приведен ответ, не включающий отрицательные решения, или указаны не все пары решений.
1	Приведен верный ответ, при этом решение отсутствует. Или в ответ включены иррациональные решения.
0	Неверное решение, или полностью неверный ответ (см. 3 балла).

Задача 5

Балл	За что ставится
7	Полностью верное решение. Правильный ответ.
5	Неполное решение, не рассмотрен случай равенства нулю одного из показателей, но дальнейшее верно. При этом имеются верные рассуждения в случае разности двух нечетных чисел.
3	Написана система неравенств, связывающая показатели степеней 2 и 3. Рассуждения с системой отсутствуют или неверны, в частности, не рассмотрен случай разности нечетных чисел. Или вместо оценок (неравенств) для показателей в решении используются или получаются равенства.
1	Приведен неверный ответ, при этом написана, возможно, с ошибкой, система неравенств, связывающих показатели степеней 2 и (или) 3.
0	Неверное решение, или неверный ответ (см. 1 балл).