9 класс

9.1. Даны положительные числа p и r. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — линейные функции с корнями p и r. Найдите все корни уравнения $f(x)g(x) = f(0)g(0)$.

Ответ. $x_1 = 0$, $x_2 = p + r$.

Первое решение. Пусть данные функции имеют вид: $f(x) = ax + b$ и $g(x) = cx + d$. Тогда уравнение принимает вид $(ax + b)(cx + d) - bd = 0$, то есть $x(acx + ad + bc) = 0$. Один корень этого уравнения $x_1 = 0$, а второй $x_2 = \frac{-ad - bc}{ac}$, то есть $x_2 = -\frac{d}{c} - \frac{b}{a}$. Осталось заметить, что $-\frac{d}{c}$ есть r, а $-\frac{b}{a}$ — это p.

Второе решение. Запишем наши функции в виде: $f(x) = a(x - p)$, $g(x) = c(x - r)$. Тогда уравнение принимает вид

$$ac(x - p)(x - r) - acpr = 0,$$

то есть $acx(x - p - r) = 0$, откуда и следует ответ.

Комментарий. Доказано только, что одним из корней является 0 — 2 балла.

Ответ зависит от переменных, не указанных в условии — баллы не добавляются.

9.2. На переменах школьники играли в настольный теннис. Любые два школьника играли друг с другом не более одной игры. В конце недели оказалось, что Петя сыграл половину, Коля — треть, а Вася — пятую часть от числа всех проведённых за неделю игр. Какое количество игр могло быть сыграно за неделю, если известно, что по крайней мере в двух играх не участвовали ни Вася, ни Петя, ни Коля?

Ответ. 30.

Решение. Из условия следует, что половина, треть и пятая часть от общего количества проведённых игр — целые числа. Поскольку наименьшее общее кратное знаменателей — чисел 2, 3, 5 — равно 30, то общее количество проведённых игр тоже кратно 30. Пусть оно равно $30p$. Тогда Петя сыграл $15p$, Коля — $10p$, Вася — $6p$ игр. Пусть y — количество игр, сыгранных между собой Петей, Колей и Васей (это число равно 0, 1, 2 или 3), а z — количество игр, сыгранных без участия Пети, Коли и Васи ($z \geqslant 2$). Тогда $15p + 10p + 6p - y + z = 30p$, то есть $p = y - z$. Единственное возможное положительное значение p равно 1, и оно достигается, когда $y = 3, z = 2$.

Замечание. Условие непротиворечиво: такая ситуация действительно могла иметь место (то есть можно провести 30 игр в соответствии с условием).

Комментарий. Доказано, что общее количество игр делится на 30 — 2 балла.

Приведён пример с 30 играми, но не обосновано, что других вариантов нет — 3 балла.

Приводить пример с 30 играми в решении не требуется (по условию известно, что такие игры были проведены).

9.3. Из точки A проведены касательные AB и AC к окружности с центром O (B и C — точки касания). Пусть M — середина отрезка AO. Докажите, что окружность, описанная около треугольника ABM, касается прямой AC.

Решение. Утверждение задачи равносильно тому, что угол OAC равен вписанному углу ABM (см. рис. 4). Но радиус OB перпендикулярен касательной AB, поэтому BM — медиана прямоугольного треугольника OBA. Значит $BM = \frac{AO}{2} = AM$, и потому $\angle ABM = \angle BAM = \angle BAO$. Но AO — биссектриса угла BAC, значит, $\angle BAO = \angle OAC$. Утверждение доказано.

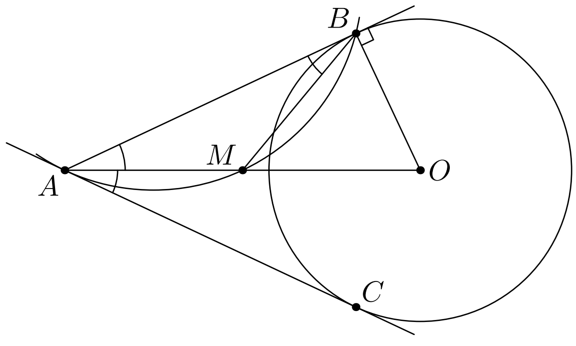

Рис. 4

Комментарий. Указано, какое равенство углов равносильно условию — 2 балла.

9.4. К числу A, состоящему из восьми ненулевых цифр, прибавили семизначное число, состоящее из одинаковых цифр, и получили восьмизначное число B. Оказалось, что число B может быть получено из числа A перестановкой некоторых цифр. На какую цифру может начинаться число A, если последняя цифра числа B равна 5?

Ответ. 5.

Решение. Так как числа A и B имеют одинаковую сумму цифр, то их разность делится на 9. Поэтому прибавленное семизначное число из одинаковых цифр делится на 9. Значит, оно состоит из девяток. То есть можно считать, что к числу A прибавили 10^7 и вычли 1. Это значит, что число B получается из числа A увеличением первой цифры на 1 и уменьшением последней цифры на 1 (так как в A нет нулей, а B восьмизначно), а остальные цифры не меняются. Так как число B может быть получено из числа A перестановкой некоторых цифр, то последняя цифра числа B совпадает с первой цифрой числа A (и наоборот). Поэтому число A может начинаться только на цифру 5.

Комментарий. Доказано, что прибавляемое число состоит из девяток — 2 балла.

Ответ получен рассмотрением примера — 1 балл.

9.5. На клетчатой доске 8×8 размещены 8 клетчатых кораблей размера 1×3 так, что ни у каких двух клеток, занятых разными кораблями, нет общих точек. Одним выстрелом разрешается прострелить целиком все 8 клеток одной строки или одного столбца. Какого минимального количества выстрелов хватит, чтобы гарантированно ранить хотя бы один корабль?

Ответ. 2 выстрелов.

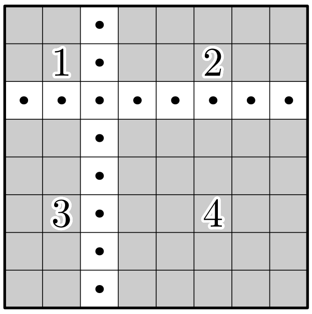

Рис. 5

Решение. Сделаем 2 выстрела так, как показано на рис. 5. Предположим, что мы не ранили ни один корабль. Тогда в области 1 кораблей нет. В каждой из областей 2 и 3 стоит не более 1 корабля. Значит, в области 4 стоит по крайней мере 6 кораблей.

Область 4 является квадратом 5×5. Тогда в этой области корабли, расположенные горизонтально, не могут лежать в соседних строках, а корабли, расположенные вертикально, не могут располагаться в соседних столбцах. Поэтому в этой области находится 3 «вертикальных» и 3 «горизонтальных» корабля, причем один из них лежит в центральной строке, а другой — в центральном столбце области. Но тогда оба этих корабля содержат центральную клетку области. Противоречие. Значит, по крайней мере один корабль ранен.

Покажем, что если сделан только один выстрел, то можно не ранить ни один корабль. Пусть выстрел был сделан в какую-то строку. Заметим, что в одной строке можно разместить два корабля. Тогда если выстрел сделан в строку с нечётным номером, по два корабля могли стоять в строках с номерами 2, 4, 6 и 8. Если же выстрел сделан в строку с чётным номером, по два корабля могли стоять в строках с номерами 1, 3, 5 и 7.

Замечание. Можно показать, что в области 4 нельзя расставить даже 5 кораблей.

Комментарий. Показано только, как за 2 выстрела ранить корабль — 4 балла.

Доказано только, что 1 выстрела может не хватить — 2 балла.

Приведён правильный пример двух выстрелов, но не объяснено, почему будет ранен хотя бы один корабль — 1 балл (вместо 4 баллов по первому критерию).