9 класс

1. При каких значениях x и y верно равенство $x^2+(1-y)^2+(x-y)^2=\frac{1}{3}$.

Решение. Раскрыв скобки и сгруппировав слагаемые по степеням переменной x, получим квадратное уравнение относительно x следующего вида $x^2-yx+\left(y^2-y+\frac{1}{3}\right)^2=0$.

Тогда $D=y^2-4y^2+4y-\frac{4}{3}=-3y^2+4y-\frac{4}{3}=-3\left(y-\frac{2}{3}\right)^2$. Квадратное уравнение имеет корни, если $D\geq 0$, следовательно, $y=\frac{2}{3}$. Подставив это значение в исходное уравнение, получим, что $x=\frac{1}{3}$.

Ответ: $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{2}{3}$.

2. Среди 81 монеты имеется одна фальшивая (более лёгкая) монета. Как её найти, используя не более четырёх взвешиваний.

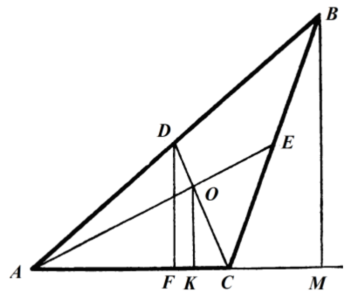
Решение. Разделим монеты на три кучки по 27 монет. Взвесим первую и вторую кучки. Если весы в равновесии, то фальшивая монета в третьей кучке. Если весы не в равновесии, то фальшивая монета в той кучке, которая легче. После этого разбиваем кучку из 27 монет (в которой есть фальшивая монета) на три кучки по 9 монет и вторым взвешиванием определяем более лёгкую кучку. Третьим взвешиванием определяем более лёгкую тройку монет. И, наконец, четвёртым взвешиванием определяем фальшивую монету.

3. Купец купил в Твери несколько мешков соли и продал их в Москве с прибылью в 100 рублей. На все вырученные деньги он снова купил в Твери соль (по тверской цене) и продал в Москве (по московской цене). На этот раз прибыль составила 120 рублей. Сколько денег он потратил на первую покупку?

Решение. Пусть купец заплатил при первой покупке в Твери за соль x рублей. Тогда он продал ее в Москве за x+100 рублей. Во второй раз он потратил в Твери x+100 рублей, а выручил в Москве x+100+120=x+220 рублей. Так как соотношение московских и тверских цен не изменилось, то можно составить пропорцию $\frac{x}{x+100}=\frac{x+100}{x+220}$, откуда получаем $x^2+220x=x^2+200x+10000$, $20x=10000$, $x=500$.

Ответ: 500 рублей.

4. В треугольнике две медианы взаимно перпендикулярны, их длины равны 18 см и 24 см. Вычислите площадь треугольника.



Решение. $S=\frac{1}{2}AC\cdot BM$ (см. рисунок). По свойству медиан имеем $AO=\frac{2}{3}\cdot AE=16$, $OC=\frac{2}{3}\cdot CD=12$. Из ΔAOC находим $AC=\sqrt{AE^2+OC^2}=20$. Пусть $DF\perp AC$, $OK\perp AC$, кроме того, $BM \perp AC$. Заметим, что $S_{AOC} = \frac{1}{2} AO \cdot OC = \frac{1}{2} KO \cdot AC$, следовательно, $KO = \frac{AO \cdot OC}{AC} = 9{,}6$. Треугольники FDC и KOC подобны, значит, $\frac{DF}{KO} = \frac{DC}{OC}$, откуда получаем, что $DF = \frac{DC \cdot KO}{OC} = 14{,}4$, а $BM = 2DF = 28{,}8$. Таким образом, имеем $S = \frac{1}{2} AC \cdot BM = 288$.

Ответ: 288.

5. По определению, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Какой сомножитель нужно вычеркнуть из произведения $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 20!$, чтобы оставшееся произведение стало квадратом некоторого натурального числа?

Решение. Заметим, что

$$1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot \ldots \cdot 20! = (1! \cdot 2!) \cdot (3! \cdot 4!) \cdot \ldots \cdot (19! \cdot 20!) =$$
$$= (1! \cdot 1! \cdot 2) \cdot (3! \cdot 3! \cdot 4) \cdot (5! \cdot 5! \cdot 6) \cdot \ldots \cdot (17! \cdot 17! \cdot 18) \cdot (19! \cdot 19! \cdot 20) =$$
$$= (1!)^2 \cdot (3!)^2 \cdot (5!)^2 \cdot \ldots \cdot (19!)^2 \cdot (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 18 \cdot 20) =$$
$$= (1!)^2 \cdot (3!)^2 \cdot (5!)^2 \cdot \ldots \cdot (19!)^2 \cdot \big(2 \cdot (2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 2) \cdot \ldots \cdot (10 \cdot 2)\big) =$$
$$= (1! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 19!)^2 \cdot 2^{10} \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 10) = (1! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 19!)^2\, (2^5)^2 \cdot 10!$$

Очевидно, что первые два множителя квадраты, поэтому, если вычеркнуть 10!, то останется квадрат. Легко видеть, что вычеркивание других множителей, не дает желаемого результата.

Ответ. 10!