Муниципальный этап Всероссийской олимпиады по математике
2018-2019 уч.год
10 класс

1. На доске написана таблица, содержащая 100 столбцов и 2 строки. Саша и Женя по очереди заполняют по одной клетке таблицы, вписывая -1 или 1. Первый ход делает Саша. После того, как таблица полностью заполнена, для каждой строки вычисляются произведения всех 100 чисел, стоящих в этой сроке. Аналогично для каждого столбца вычисляются произведения двух чисел, стоящих в этом столбце. Может ли Женя делать свои ходы таким образом, чтобы в заполненной таблице сумма вычисленных произведений чисел в строках равнялась -2, а сумма всех вычисленных произведений чисел в столбцах равнялась 0?

2. Известно, что $a < b < c$. Докажите, что уравнение
$$3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + bc + ac = 0$$
имеет два различных корня x_1 и x_2, причем $a < x_1 < b$, $b < x_2 < c$.

3. Две прямые l_1 и l_2, угол между которыми равен α, служат общими внутренними касательными к окружностям радиусов R_1 и R_2. К окружностям проведена общая внешняя касательная, пересекающая прямые l_1 и l_2 в точках A и B соответственно. Найдите длину отрезка AB.

4. Докажите равенство
$$2018 \cdot 1 + 2017 \cdot 2 + 2016 \cdot 3 \ldots + (2019 - k) \cdot k + \ldots + 1 \cdot 2018 =$$
$$= \frac{2019 \cdot 2018}{2} + \frac{2018 \cdot 2017}{2} + \frac{2017 \cdot 2016}{2} + \ldots + \frac{n \cdot (n-1)}{2} + \ldots + \frac{2 \cdot 1}{2}$$

5. Взяли десять подряд идущих натуральных чисел, больших 1, перемножили их, нашли все простые делители полученного числа и перемножили эти простые делители (взяв каждый ровно по одному разу). Какое наименьшее число могло получиться? Полностью обоснуйте свой ответ.