2019 год

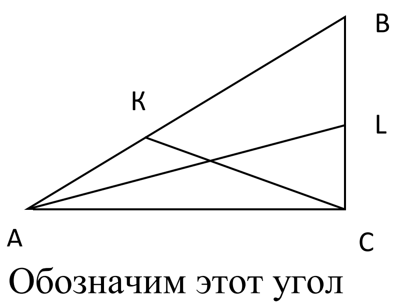
Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап

10 класс
Решения

1. Пусть N = $\overline{ab}$ =10a+b – искомое число. По условию 10a + aq = 3aq^2, где q – знаменатель геометрической прогрессии. Отсюда получаем 3q^2 = q + 10, $q_1 = 2$, $q_2 = -\frac{5}{3}$. Поскольку в ≥ 0, знаменатель прогрессии равен 2. Первые два ее члена – это цифры, поэтому aq ≤ 9. Отсюда получаем: a = 1, 2, 3, 4.
Ответ: 12, 24, 36, 48.

2. Поскольку прямая пересекает график в двух точках, она не является вертикальной, и ее уравнение имеет вид y = kx + b. Абсциссы точек пересечения x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $x^2 = kx + b$. По теореме Виета $x_1 + x_2 = k$, $x_1 \cdot x_2 = -b$. Отсюда $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1x_2} = -\frac{k}{b}$. Точка пересечения прямой с осью абсцисс есть корень уравнения kx + b = 0, т.е. $x_0 = -\frac{k}{b}$. Отсюда получаем требуемое равенство.

3. Обозначим точку пересечения отрезков CK и AL за O. Заметим, что CO– медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника ACL. Значит, AO = OC = OL и
∠OCA =∠ OAC =∠ OAK



(последнее равенство верно, так как AO – биссектриса). Обозначим этот угол за α.
Найдем угол B. Так как треугольник CBK равнобедренный, этот угол равен внешнему углу CBK треугольника CKA, то есть ∠B = ∠ACK + ∠KAC = 3α.
Из равенства ∠B + ∠A = 90° получаем, что 2 α + 3α = 90°. Значит, α = 18°.Соответсвенно, ∠B = 54°, а ∠A = 36°.
Ответ: 36°, 54°, 90°

4. Пусть $|a| \neq |b|$. Тогда $b + a \neq 0$, и данное уравнение – квадратное:
$(a+b)x^2 - 2(a^2+b^2)x + (a^3+b^3) = 0$.

При этом $\frac{D}{4} = (a^2+b^2)^2 - (a+b)(a^3+b^3) = -ab(a-b)^2 \neq 0$, так как a,b — ненулевые числа, и $a-b \neq 0$. Значит, уравнение не может иметь ровно одно решение.
Примечание: при $b = -a$ данное уравнение — линейное: $-4a^2x = 0$ и оно имеет единственное решение $x = 0$. При $a = b$ дискриминант обращается в ноль, и уравнение также имеет одно решение.

5. Заметим, что если в какой-то горизонтали стоит белая ладья, то никаких других ладей в этой горизонтали не может быть. Следовательно, белых ладей не может быть более восьми. Если черных ладей на доске нет, то всего ладей не более восьми. Если же на доске есть хотя бы одна черная ладья, то на одной горизонтали с ней белых ладей быть не может, значит, в этом случае, белых ладей не более 7.
Рассуждая аналогично про вертикали, получим, что и черных ладей не более, чем 7. Таким образом, всего ладей на доске не более 14. Приведем пример расстановки 14 ладей. Можно расставить 7 черных ладей во всех клетках первой горизонтали, кроме первой, и 7 белых ладей во всех клетках первой вертикали, кроме той клетки, которая лежит на пересечении первой вертикали и первой горизонтали.