ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ. 2019–2020 уч. г.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП. 10 КЛАСС

Задания, ответы и критерии оценивания

Каждое задание оценивается максимально в 7 баллов

10.1. Новенькие смарт-часы стоят 2019 рублей. У Намжила есть $(500^2 + 4 \cdot 500 + 3) \cdot 498^2 - 500^2 \cdot 503 \cdot 497$ рублей. Хватит ли ему денег на покупку смарт-часов?

Ответ: нет.

Решение: Обозначим $a = 500$. Тогда исходное выражение равно $(a^2 + 4 \cdot a + 3) \cdot (a-2)^2 - a^2 \cdot (a+3) \cdot (a-3) = (a^2 + 4 \cdot a + 3) \cdot (a^2 - 4a + 4) - a^2 \cdot (a^2 - 9) = a^4 - 4a^3 + 4a^2 + 4a^3 - 16a^2 + 16a + 3a^2 - 12a + 12 - a^4 + 9a^2 = 4a + 12$. Подставим a: $4a + 12 = 4 \cdot 500 + 12 = 2012 < 2019$. Значит, Нажмилу не хватит денег на покупку смарт-часов.

Критерии: Только ответ – 0 баллов. Идея заменить $a = 500$, но решение не закончено или с ошибкой – 3 балла. При непосредственном упрощении выражения путем арифметических вычислений решение не доведено до конца или допущена ошибка – 2 балла. 7 баллов ставить за полное верное решение (в т.ч., возможно, непосредственными вычислениями).

10.2. Является ли простым число $4^{2019} + 6^{2020} + 3^{4040}$?

Ответ: нет.

Решение. Преобразуем выражение: $4^{2019} + 6^{2020} + 3^{4040} = (2^2)^{2019} + 2^{2020} \cdot 3^{2020} + 3^{2 \cdot 2020} = (2^{2019})^2 + 2 \cdot 2^{2019} \cdot 3^{2020} + (3^{2020})^2 = (2^{2019} + 3^{2020})^2$. Значит, исходное число является квадратом числа $2^{2019} + 3^{2020}$, т.е. не является простым.

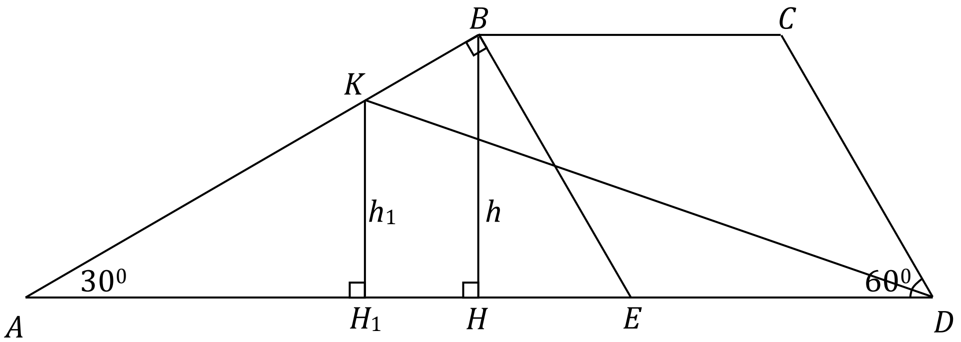
Замечание: Заметим, число $2^{2019} + 3^{2020}$ не простое. Его наименьший простой делитель – 2699, а значит, и делитель исходного числа.

Критерии: Только ответ – 0 баллов. Идея преобразовать выражение заменой 4 на 2^2, 6 на $2 \cdot 3$, 4040 на $2 \cdot 2020$, но решение не доведено до конца или с ошибкой – 3 балла. 7 баллов ставить за полное верное решение (в т.ч., возможно, полученное путем исследования остатков от деления).

10.3. В трапеции $ABCD$ основания $BC = 3$ и $AD = 9$, угол $\angle BAD = 30°$, а $\angle ADC = 60°$. Через точку D провели прямую, делящую трапецию на две равновеликие части. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного внутри трапеции.

Ответ: $\sqrt{39}$.

Решение: Обозначим $BC = x$, тогда $AD = 3x$. Опустим из т. B высоту трапеции BH на основание AD. Тогда площадь треугольника ABD равна $S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot BH = \frac{3}{2}xh$, а $S_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot BH = \frac{1}{2}xh$, т.е. $S_{ABD} = 3 \cdot S_{BCD}$. Значит прямая, делящая трапецию на две равновеликие части и выходящая из т.D, пересекает прямую AB. Обозначим точку пересечения – т.K.



$$S_{AKD} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AD + BC}{2} \cdot BH = xh.$$

С другой стороны, площадь $S_{AKD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot BH_1 = \frac{3}{2}xh_1$, где h_1 – высота, опущенная из т. K на AD. Тогда $xh = \frac{3}{2}xh_1$, откуда $\frac{BH_1}{BH} = \frac{2}{3}$. Из подобия треугольников AKH_1 и ABH следует, что и $\frac{AK}{AB} = \frac{2}{3}$.

Из вершины B проведем прямую, параллельную CD до пересечения с основанием AD в точке E. Тогда $AE = AD - DE = AD - BC = 2x$. Из прямоугольного треугольника ABE найдем $AB = AE \cdot \cos(30^0) = x\sqrt{3}$. Тогда $AK = \frac{2}{\sqrt{3}}x$. По теореме косинусов из треугольника AKD найдем:

$DK = \sqrt{AK^2 + AD^2 - 2 \cdot AK \cdot AD \cdot \cos 30°} = \sqrt{\frac{4}{3}x^2 + 9x^2 - 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}x \cdot 3x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = x\sqrt{\frac{4}{3} + 9 - 6} = x\sqrt{\frac{13}{3}}$.

Подставим $x = 3$, тогда $DK = \sqrt{39}$.

Критерии: Только ответ – 0 баллов. 7 баллов – верное ответ при наличии верного решения. Частично верное продвижение в решении – 3-5 баллов.

10.4. Куб размера 5×5×5 клеток разбит на кубики 1×1×1, внутри каждого из которых сидит по кузнечику. В некоторый момент каждый кузнечик переместился в соседний по стороне кубик (вверх, вниз, влево или вправо при условии, что там кубик есть). Останется ли при этом кубик, в котором не окажется ни одного кузнечика?

Ответ: да, останется.

Решение: Раскрасим кубик в шахматном порядке. Так как общее число клеток кубика 5×5×5 = 125 нечетно, то черных и белых кубиков не может быть поровну. Пусть для определенности черных кубиков больше. Тогда кузнечиков, сидящих в белых кубиках, меньше, чем черных кубиков. Поэтому хотя бы один из черных кубиков останется пустой, так как в черные кубики перепрыгивают только кузнечики, сидящие в белых кубиках.

Критерии: Только ответ – 0 баллов. Идея раскраски, но решение не закончено – 3 балла. Полное верное решение – 7 баллов.

10.5. В единичном квадрате произвольным образом отметили 76 точек. Докажите, что некоторым кругом радиуса $\frac{1}{7}$ можно накрыть сразу 4 точки.

Решение: Разобьем квадрат на 25 равных квадратов. Докажем, что существует хотя бы один квадрат, содержащий 4 точки. Предположим противное, тогда в любом квадрате не больше 3 точек и всего точек не больше чем 75 – противоречие.

Опишем возле найденного квадрата окружность. Диаметр окружности равен диагонали квадрата, длина которой равна $\frac{\sqrt{2}}{5} < \frac{2}{7}$. Эта окружность со внутренностью и будет искомым кругом.

Критерии: Полное верное решение – 7 баллов. Сформулирована идея, связанная с принципом Дирихле, и есть некоторое продвижение в ней – 3-5 баллов.