

**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады
школьников по математике
в 2019 – 2020 учебном году
10 класс**

Время выполнения заданий – 4 часа

10.1. В конкурсе, в котором участвовало 5 человек, было несколько вопросов. На каждый вопрос один из участников дал неправильный ответ, а остальные – правильные. Число правильных ответов у Пети равно 10 – это меньше, чем у любого другого. Число правильных ответов у Васи равно 13 – это больше, чем у любого другого. Сколько вопросов было в конкурсе? Ответ обоснуйте.

Решение: На каждый вопрос было четыре верных ответа, значит, общее число верных ответов кратно четырём. Наибольшее количество верных ответов равно $13 + 3 \cdot 12 + 10 = 59$, наименьшее – $13 + 3 \cdot 11 + 10 = 56$. В промежутке от 56 до 59 есть только одно число, кратное 4: число 56. Значит, всего вопросов было $56 : 4 = 14$. Ситуация, когда вопросов ровно 14 возможна. Например, Вася неверно ответил только на первый вопрос, Петя – на второй, третий, четвёртый и пятый, и каждый из трёх оставшихся мальчиков – на три «своих» вопроса (скажем один – на вопросы № 6 – 8, второй – № 9 – 11 и третий – № 12 – 14).

Ответ: 14 вопросов.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Не обосновано, что описанная в задаче ситуация возможна	баллы не снижать
При переборном решении разобраны не все случаи, но верный ответ и пример получены	3 балла
Установлены либо границы возможного количества верных ответов, (числа 56 и 59) либо делимость количества верных ответов на 4	2 балла
Приведён верный пример (и дан верный ответ), единственность ответа не обоснована	1 балл
Ответ без обоснования	0 баллов

10.2. Можно ли в выражении $\frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \frac{1}{4} * \frac{1}{5} * \frac{1}{6} * \frac{1}{7} * \frac{1}{8}$ вместо знаков * так расставить знаки плюс и минус, чтобы модуль этого выражения стал меньше $\frac{1}{500}$?

Решение: Наименьшее общее кратное всех чисел знаменателя равно 840. Если в

числителе после приведения к этому общему знаменателю всех дробей получится 0, -1 или 1 , то ответ положительный; иначе отрицательный. Числители дробей после приведения равны 420, 280, 210, 168, 140, 120 и 105. Последней цифрой их суммы (с учётом знаков чисел) будет 3 или 7. Значит, так расставить знаки нельзя.

Ответ: Нельзя.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Доказано, что после приведения к общему знаменателю числитель полученной дроби будет нечётен (или не равен 0)	3 балла
Доказано, что после приведения к общему знаменателю в задаче требуется получить несократимую дробь с числителем, не превосходящим по модулю числа 1	1 балл
Неверный ответ или верный ответ без обоснования, возможно, проиллюстрированный несколькими примерами	0 баллов

10.3. Докажите, что при любом натуральном числе n и при любом действительном α имеет место двойное неравенство

$$\frac{2}{3} < \frac{1}{n + \sin^2 \alpha} + \frac{1}{n + 2 \sin^2 \alpha} + \dots + \frac{1}{n + (2n + 1) \sin^2 \alpha} \leq 3.$$

Решение: Пусть $t = \sin^2 \alpha$ (t — параметр, принимающий значение из отрезка $[0; 1]$). Требуется доказать, что

$$\frac{2}{3} < \frac{1}{n + t} + \frac{1}{n + 2t} + \dots + \frac{1}{n + (2n + 1)t} \leq 3.$$

Каждая из дробей оцениваемой суммы тем больше, чем меньше её знаменатель, поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{n + t} + \frac{1}{n + 2t} + \dots + \frac{1}{n + (2n + 1)t} &\leq \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{2n+1} = \\ &= \frac{2n + 1}{n} = 2 + \frac{1}{n} \leq 2 + 1 = 3. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{n + t} + \frac{1}{n + 2t} + \dots + \frac{1}{n + (2n + 1)t} \geq \frac{1}{n + 1} + \frac{1}{n + 2} + \dots + \frac{1}{n + (2n + 1)} \geq$$

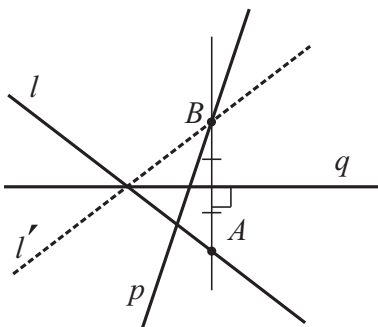
$$\geq \underbrace{\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+1} + \dots + \frac{1}{3n+1}}_{2n+1} = \frac{2n+1}{3n+1} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3(3n+1)} > \frac{2}{3}.$$

Ещё заметим, что оценка 3 достигается (при $n = 1, \alpha = 0$), а оценка $\frac{2}{3}$ — нет.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное доказательство	7 баллов
Доказано только одно из двух неравенств, либо ≤ 3 , либо $> \frac{2}{3}$	3 балла
Осуществлена замена $t = \sin^2 \alpha$; других продвижений в решении нет	1 балл
Любые выкладки, из которых ход решения не просматривается, а также более грубые оценки, чем требуется	0 баллов

10.4. На плоскости проведены три попарно пересекающиеся прямые: l, p, q . С помощью циркуля и линейки постройте на прямых l и p соответственно точки A и B так, чтобы отрезок AB был перпендикулярен прямой q и делился этой прямой пополам. Определите, сколько решений имеет задача в зависимости от взаимного расположения прямых l, p, q ?



К решению задачи 10.4

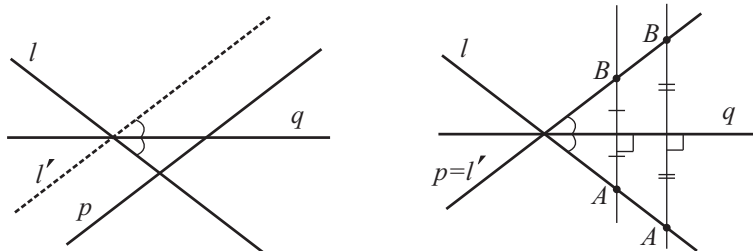
Решение:

Анализ. Пусть такие точки найдены. Тогда при осевой симметрии относительно прямой q они переходят друг в друга. При этом точка A лежит на прямой l , поэтому точка B обязана лежать на прямой l' — образе прямой l при указанной симметрии. Кроме того, B лежит на прямой p . Значит, B — точка пересечения прямых l' и p — см. рисунок. (Аналогично, A — точка пересечения прямых p' и l .)

Построение. Отобразим прямую l симметрично прямой q . Получим прямую l' . B — точка пересечения прямых p и l' . Точка A — точка пересечения прямой l и прямой, проходящей через точку B перпендикулярно прямой q .

Доказательство. По построению точка B лежит на прямой p , а прямая AB перпендикулярна прямой q . В силу того, что $B \in l'$, а прямая l' симметрична прямой l относительно q , образ точки B при этой симметрии лежит на прямой l . Кроме того, он лежит на прямой AB . Значит, точка A и является этим образом. Тогда прямая q — серединный перпендикуляр к отрезку AB , поэтому отрезок AB перпендикулярен прямой q и делится этой прямой пополам.

Исследование. Все указанные построения возможны, если только точка B найдётся. При этом для каждой полученной точки B точка A определяется однозначно. Точка B единственна (и тогда задача имеет единственное решение), если прямые l' и p не параллельны. Если же они параллельны, то решений нет, исключая тот случай, когда прямая l' совпадёт с прямой p — тогда решений бесконечно много (в качестве B подойдёт любая точка прямой p). Параллельность означает, что прямая q параллельна биссектрисе угла, образованного прямыми l и p , совпадение — что прямая q сама является этой биссектрисой.



К решению задачи 10.4. Слева — решений нет, справа — бесконечно много решений

Ответ: Если прямая q является биссектрисой угла, образованного прямыми l и p , то решений бесконечно много; если она параллельна биссектрисе, но не совпадает с ней — решений нет. Иначе решение единственно.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное обоснованное построение и верное исследование	7 баллов
И построение, и исследование есть, но доказательство того, что построение приводит к нужному отрезку не полно или отсутствует	6 баллов
Верное обоснованное построение, но анализ не проведён (упущен хотя бы один из случаев: решений нет или их бесконечно много)	5 баллов
Имеется идея рассмотреть симметрию относительно прямой q ; при этом построение точек не сделано	2 балла
Верно исследованы частные случаи, когда решений нет, или когда их бесконечно много	по 1 баллу за случай
Всевозможные замечания о исследуемой конструкции, которые к решению не привели	0 баллов

10.5. Пусть $(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1$. Найдите все значения, которые может принимать число $x + y$, и докажите, что других значений быть не может.

Решение: Рассмотрим функцию $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$. Так как при любом дей-

ствительном x выполнено $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x$, эта функция всюду положительна. Пусть $a > 0$. Решая уравнение $f(x) = a$, находим, что значение a функция принимает в единственной точке $x = \frac{a^2-1}{2a}$. Наше уравнение имеет

вид $f(x)f(y) = 1$. Значит, если $f(x) = a$, то $f(y) = 1/a$. Тогда $x = \frac{a^2-1}{2a}$,
 $y = \frac{\frac{1}{a^2}-1}{2 \cdot \frac{1}{a}} = \frac{1-a^2}{2a}$. Отсюда $x+y=0$.

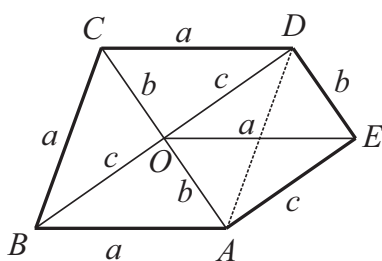
Ответ: 0.

Примечание: У задачи есть и другие решения, в том числе связанные с тригонометрической заменой $x = \operatorname{tg} \alpha$, $y = \operatorname{tg} \beta$.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения в преобразованиях допущены ошибки, возможно, приведшие к неверному ответу	4 балла
Идея рассмотрения функции $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$, не доведённая до решения задачи	2 балла
Верный ответ, подкреплённый верными примерами (в любом количестве), но не доказанный в общем случае	1 балл
Верный ответ без обоснования или неверный ответ	0 баллов

10.6. Точку внутри выпуклого пятиугольника соединили с его вершинами, в результате чего пятиугольник оказался разбитым на 5 равных между собой неравносторонних треугольников. Докажите, что эти треугольники прямоугольные.



К решению задачи 10.6

Решение: Пусть пятиугольник обозначен буквами $ABCDE$, а внутри выбрали точку O . Обозначим стороны получившихся треугольников через a, b, c , а противолежащие им углы (в градусах) через α, β и γ . Для каждого из пяти треугольников AOB, BOC, COD, DOE и EOA запишем на сторонах их длины. Так как отрезки OA, OB, OC, OD и OE входят в два треугольника каждый, на них будет записано по две одинаковые буквы, а так как каждая из букв a, b, c записана нечётное число раз (именно 5), то и на отрезках периметра пятиугольника каждая из этих букв встретится нечётное число раз. Это возможно только если одна из букв (пусть a) встречается трижды, а две остальные — по одному разу. Тогда среди углов AOB, BOC, COD, DOE и EOA ровно три угла

α , один угол β и один угол γ . Имеем $3\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$. Так как $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ (как сумма углов любого треугольника), получаем $2\alpha = 180^\circ$ или $\alpha = 90^\circ$, что и означает прямоугольность каждого из треугольников AOB , BOC , COD , DOE и EOA .

Для полноты решения следует показать, что ситуация, описанная в задаче, возможна. Пример. Рассмотрим ромб $ABCD$, отличный от квадрата. Пусть O — точка пересечения его диагоналей, а точка E симметрична точке O относительно середины стороны DA . Легко проверить, что треугольники AOB , BOC , COD , DOE и EOA равны, то есть условие задачи выполнено.

Примечание: Из приведённого решения несложно увидеть, что построенный пример — единственно возможный (с точностью до линейных размеров сторон и острого угла ромба). Поэтому можно, например, выразить все углы такого пятиугольника через его наименьший угол φ . Они будут равными φ , $180^\circ - \varphi$, $90^\circ + \frac{\varphi}{2}$, $180^\circ - \frac{\varphi}{2}$, 90° .

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное доказательство и пример пятиугольника и точки	7 баллов
Верное доказательство, но пример отсутствует	6 баллов
Доказано, что из пяти сторон пятиугольника три равны, а две другие различны	3 балла
Приведён пример пятиугольника и точки внутри него, реализующие условие задачи	1 балл