МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
2019/2020 УЧЕБНЫЙ ГОД
11 КЛАСС (решения)

1. (*7 баллов*) Первый член последовательности равен 934. Каждый следующий равен сумме цифр предыдущего, умноженной на 13. Найдите 2019-й член последовательности.

Решение. Найдём несколько первых членов последовательности:
$a_1 = 934; a_2 = 16 \cdot 13 = 208; a_3 = 10 \cdot 13 = 130; a_4 = 4 \cdot 13 = 52;$
$a_5 = 7 \cdot 13 = 91; a_6 = 10 \cdot 13 = 130 = a_3.$
Так как при вычислении каждого следующего числа используется только предыдущее число, то далее члены последовательности будут повторяться с периодом 3. Число 2019 кратно 3, поэтому $a_{2019} = a_3 = 130.$
Ответ. 130.

2. (*7 баллов*) Имеет ли отрицательные корни уравнение $x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 3x + 9 = 0$?

Решение. $(x^4 - 6x^2 + 9) - 4x^3 - 3x = 0,$
$(x^2 - 3)^2 = 4x^3 + 3x,$
$(x^2 - 3)^2 = x(4x^2 + 3).$
Если $x < 0,$ то $(x^2 - 3)^2 \ge 0, x(4x^2 + 3) < 0.$
Значит, полученное равенство при любом $x < 0$ будет неверным. Следовательно, отрицательных корней нет.
Ответ. Нет, не имеет.

3. (*7 баллов*) Функция f такова, что для любых $x > 0, y > 0$ выполняется равенство $f(xy) = f(x) + f(y)$. Найдите $f(2019)$, если $f\left(\frac{1}{2019}\right) = 1$.

Решение. При $y = 1$ $f(x) = f(x) + f(1),$ $f(1) = 0.$

При $x = 2019$ $y = \frac{1}{2019}$ $f(1) = f(2019) + f\left(\frac{1}{2019}\right),$

$f(2019) = f(1) - f\left(\frac{1}{2019}\right),$

$f(2019) = -f\left(\frac{1}{2019}\right) = -1.$

Ответ. $f(2019) = -1$.

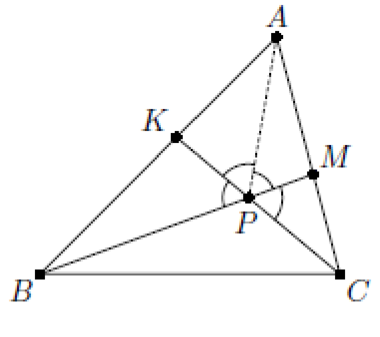
4. (*7 баллов*) Из листа клетчатой бумаги вырезали по линиям сетки многоугольник без дыр. Известно, что его можно разрезать на прямоугольники 2×1. Докажите, что у него есть хотя бы одна сторона чётной длины.

Решение. Раскрасим клетки в шахматном порядке. Так как многоугольник можно разрезать на прямоугольники 2×1, то количество белых клеток равно количеству чёрных клеток. Тогда общее число сторон белых клеток равно количеству сторон чёрных клеток. Поскольку внутри фигуры к каждой стороне белой клетки примыкает сторона чёрной клетки, то количества белых и чёрных сторон внутри фигуры равны.

Пусть у данного многоугольника нет сторон чётной длины. Тогда начало каждой стороны примыкает к квадрату того же цвета, что и конец этой стороны, и конец каждой стороны примыкает к квадрату того же цвета, что и начало следующей стороны. Следовательно, для клеток какого-то цвета количество их сторон на границе многоугольника больше. Противоречие. Значит, у многоугольника найдётся хотя бы одна сторона чётной длины.

5. (*7 баллов*) На стороне *AB* треугольника *ABC* отмечена точка *K*, а на стороне *AC* – точка *M*. Отрезки *BM* и *CK* пересекаются в точке *P*. Оказалось, что углы *APB*, *BPC* и *CPA* равны по 120^0, а площадь четырёхугольника *AKPM* равна площади треугольника *BPC*. Найдите угол *BAC*.

Решение.



К обеим частям равенства $S_{AKPM} = S_{BPC}$ прибавим площадь треугольника *BPK*:

$$S_{AKPM} + S_{BPK} = S_{BPC} + S_{BPK},$$

$$S_{ABM} = S_{BCK}.$$

Следовательно, $\dfrac{1}{2} AB \cdot AM \cdot \sin\angle A = \dfrac{1}{2} BK \cdot BC \cdot \sin\angle B.$

Тогда $\frac{BK}{AM} = \frac{AB \cdot \sin\angle A}{BC \cdot \sin\angle B}$.

По теореме синусов: $\frac{BC}{\sin\angle A} = \frac{AC}{\sin\angle B}$. Значит, $\frac{\sin\angle A}{\sin\angle B} = \frac{BC}{AC}$, $\frac{BK}{AM} = \frac{AB \cdot BC}{BC \cdot AC} \Leftrightarrow \frac{BK}{AB} = \frac{AM}{AC}$.

Таким образом, точки K и M делят отрезки BA и AC в одном и том же отношении, считая от вершин B и A соответственно, то есть $\frac{BK}{KA} = \frac{AM}{MC}$. (1)

$\angle BPK = \angle KPA = \angle APM = \angle MPC = 60^0$ (углы, смежные с данными углами по 120^0). Значит, PK и PM – биссектрисы треугольников APB и APC соответственно. По свойству биссектрисы треугольника получим: $\frac{BK}{KA} = \frac{BP}{PA}$ и $\frac{AM}{MC} = \frac{AP}{PC}$. С учётом равенства (1) получим, что $\frac{BP}{PA} = \frac{AP}{PC}$.

Кроме того, $\angle BPA = \angle APC = 120^0$. Таким образом, треугольники BPA и APC подобны (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, $\angle PAC = \angle PBA$.

Значит, $\angle BAC = \angle BAP + \angle PAC = \angle BAP + \angle PBA = 180^0 - 120^0 = 60^0$.

Ответ. 60^0.

Максимальное количество баллов – 35.