

**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады
школьников по математике
в 2019 – 2020 учебном году
7 класс**

Время выполнения заданий — 4 часа

7.1. *Алёна пригласила Серёжу в гости, сообщив, что живет в 10-м подъезде, в квартире № 333, а этаж сказать забыла. Подходя к дому Алёны, Серёжа увидел, что дом девятиэтажный. На какой этаж ему нужно подняться? В этом доме на каждом этаже каждого из подъездов одинаковое количество квартир; номера квартир начинаются с № 1. Ответ обоснуйте.*

Решение: Пусть на одном этаже в подъезде x квартир. Тогда $9 \cdot 9 \cdot x < 333$ (иначе Алёна живёт в подъезде с меньшим номером), но $9 \cdot 10 \cdot x \geq 333$ (иначе Алёна живёт в подъезде с большим номером). Отсюда $3,7 \leq x < 4,11 \dots$. Значит, $x = 4$, в одном подъезде 36 квартир, а в первых девяти подъездах 324 квартиры. Квартиры с № № 325 — 332 расположены на первых двух этажах десятого подъезда, а квартира № 333 — на третьем.

Ответ: Серёжа должен подняться на третий этаж.

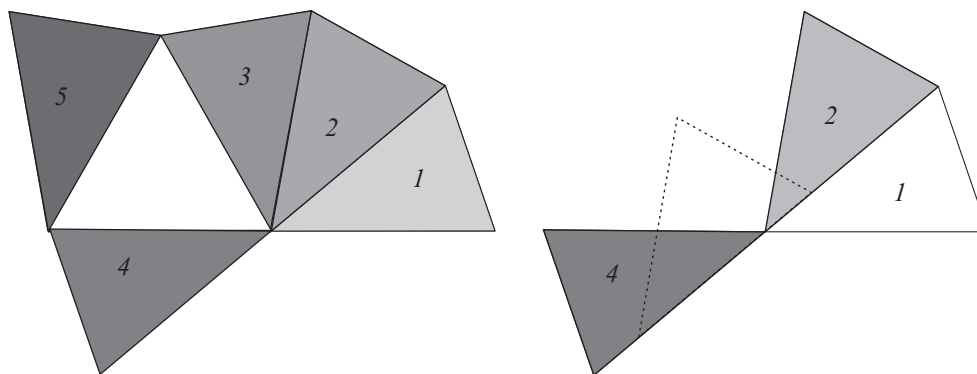
Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Показано, что возможен случай третьего этажа (есть пример) и имеется односторонняя оценка числа квартир на этаже	5 баллов
Показано, что возможен случай третьего этажа (есть пример) но не обосновано, что нет других вариантов	3 балла
Имеется только односторонняя оценка: на одном этаже не менее (не более) 4 квартир	2 балла
Верный ответ без обоснования	1 балл

7.2. *На столе лежит деревянный треугольник с углами 70° , 70° и 40° и карандаш, а других приборов нет. На большом листе бумаги нужно нарисовать какой-нибудь равносторонний треугольник. Как это сделать? Разрешается несколько раз класть треугольник на бумагу и обводить карандашом его контур.*

Решение: Заметим, что $40^\circ \cdot 3 = 120^\circ$, и что $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Значит, если мы последовательно обведём три раза треугольник, располагая его на бумаге так, как показано на рисунке слева (позиции 1 — 3), то отложим угол в 120° , а дополнительный до него будет равен 60° . Теперь поместим деревянный треугольник в

позицию 4 — построим угол 60° . (Чтобы расположить треугольник проще всего сделать ещё одну обводку, положив деревянный треугольник так, чтобы одна из его сторон — неважно какая — частью лежала на проведённом отрезке, частью — выступала за него — рисунок справа.) При этом проведённые отрезки на сторонах угла будут равны, и мы получим равносторонний треугольник. Чтобы провести его третью сторону достаточно поместить деревянный треугольник в положение 5 на рисунке и обвести его контур.



К решению задачи 7.2

Примечание: Приведённое построение не единственно возможное.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
верное и обоснованное построение равностороннего треугольника	7 баллов
верное построение приведено, но не обосновано, почему получен равносторонний треугольник	6 баллов
Построен только угол в 60° , а треугольник — нет	5 баллов
Показано, как получить угол в 60° , через углы треугольника, например, $60^\circ = 2 \cdot (70^\circ - 40^\circ)$, но построение не указано	2 балла
Приведённое построение использует незаконные операции (проведение параллельных, деление отрезка пополам и пр.)	0 баллов

7.3. Валера, Серёжа и Дима получили за три контрольные работы каждый по три оценки, причём все оценки оказались тройками, четверками или пятёрками. Валера сказал: «У меня за две контрольные оценки больше, чем у Серёжи». Серёжа ответил: «Зато у меня за две контрольные оценки выше, чем у Димы». Дима парировал: «А я две контрольные написал лучше, чем Валера». Могли ли все мальчики говорить правду? Ответ обоснуйте.

Решение: Если у Валеры были оценки 5, 4, 3 у Серёжи — 4, 3, 5, а у Димы — 3, 5, 4, то все мальчики сказали правду: Валера лучше Серёжи написал 1-ю и 2-ю

контрольную, Серёжа лучше Димы 1-ю и 3-ю, а Дима лучше Валеры 2-ю и 3-ю.

Примечание: Приведённый вариант единственен с точностью до перестановки номеров контрольных работ; школьники, конечно, этого доказывать не должны.

Ответ: Могли.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Пример, показывающий, что все трое правы	7 баллов
Ответ без обоснования или неверный ответ	0 баллов

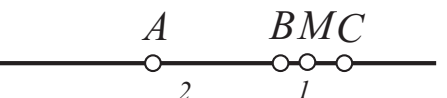
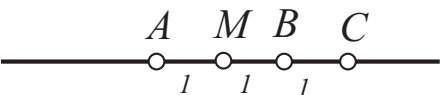
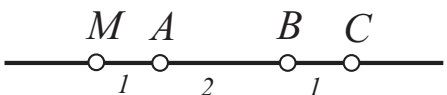
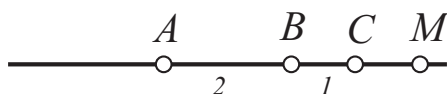
7.4. У Кати волосы растут вдвое быстрее, чем она сама, а у Алёны, которая растёт со скоростью волос Кати, — в полтора раза быстрее, чем растёт Алёна. В настоящий момент у Алёны и у Кати одинаковая высота волос над полом. Чьи волосы раньше достигнут пола? Ответ обоснуйте.

Решение: Пусть Катя выросла на x см. Тогда её волосы выросли на $2x$ см и расстояние от них до пола уменьшилось на $2x - x = x$ см. За это время Алёна выросла на $2x$ см, её волосы — на $3x$ см, и расстояние от них до пола уменьшилось на $3x - 2x = x$ см. Вывод: волосы Алёны и Кати достигнут пола одновременно.

Ответ: Одновременно.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
Ответ без обоснования	0 баллов



К решению задачи 7.5

7.5. Точка B лежит на отрезке AC , $AB = 2$, $BC = 1$. Укажите на прямой AC все точки M , для которых $AM + MB = CM$, и покажите, что других точек M с таким свойством нет.

Решение:

Способ 1. В зависимости от положения точки M на прямой AC возникают 4 случая.

Случай 1. Точка M лежит вне отрезка AC со стороны точки C . Тогда равенство невозможно, так как $AM > CM$.

Случай 2. Точка M лежит вне отрезка AC со стороны точки A . Тогда

$$CM = AM + AB + BC = MB + BC.$$

Для выполнения равенства необходимо и достаточно, чтобы $AM = BC$. Значит, M лежит вне отрезка AC со стороны A и отстоит от A на треть отрезка AC .

Случай 3. Точка M лежит на отрезке AB . Тогда $AM + MB = AB$, поэтому для выполнения равенства необходимо, чтобы $MC = AB$. Это возможно тогда и только тогда, когда M — середина AB .

Случай 4. Точка M лежит на отрезке BC . Тогда равенство невозможно, так как $AM > AB > BC > MC$.

Способ 2. Рассмотрим координатную ось. Возьмём в качестве начала координат точку A и направим ось вдоль луча AC . Тогда координаты точек A, B, C равны 0, 2 и 3 соответственно. Пусть x — координата точки M . Условие задачи определяется равенством $|x| + |x - 2| = |x - 3|$. Решая это уравнение (либо графически, либо рассматривая промежутки), находим два его корня: $x = 1$ и $x = -1$. Этим корням и соответствуют два возможных положения точки M .

Ответ: Таких точек две: середина отрезка AB и точка, лежащая на расстоянии 1 влево от точки A .

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
Задача верно сведена к решению уравнения с модулем, и это уравнение верно решено на некоторых, но не на всех промежутках	5 баллов
Верно разобраны три случая из четырёх, указанных в решении выше ИЛИ задача верно сведена к решению уравнения с модулем, которое не решено ни на одном промежутке	3 балла
Верно разобраны два случая из четырёх, указанных в решении выше	2 балла
Верно разобран один случай из четырёх, указанных в решении выше ИЛИ указаны (без обоснования) обе возможные точки M	1 балл
Указана (без обоснования) одна из возможных точек	0 баллов