ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ. 2019–2020 уч. г.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП. 8 КЛАСС

Задания, ответы и критерии оценивания

Каждое задание оценивается максимально в 7 баллов

8.1. Графики функций $y = ax + b$ и $y = cx + d$ пересекаются в точке с координатами (1; 0). Сравните значения выражений $a^3 + c^2$ и $d^2 - b^3$?

Ответ: они равны.

Решение: Т.к. графики проходят через точку с координатами (1; 0), то $0 = a + b$ и $0 = c + d$. Откуда $a = -b$, а $c = -d$; $a^3 + c^2 = (-b)^3 + (-d)^2 = -b^3 + d^2 = d^2 - b^3$. Следовательно, значения выражений $a^3 + c^2$ и $d^2 - b^3$ равны.

Критерии: Только ответ – 0 баллов. Если верно найдено, что $a = -b$, а $c = -d$, но дальнейших продвижений в решении нет (или далее решение не верно) – 2 балла. 7 баллов ставить за полное верное решение.

8.2. Боря нашел наименьшее простое число p такое, что $5p^2 + p^3$ является квадратом некоторого натурального числа. Какое число нашел Боря?

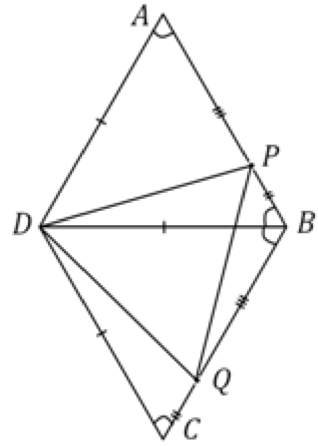
Ответ: 11.

Решение: Так как $5p^2 + p^3 = p^2(5 + p)$, то исходное число является точным квадратом тогда и только тогда, когда точным квадратом является число $5 + p$. Так как p – простое число, то $p + 5 >= 7$. Достаточно убедиться, что если $p + 5 = 9$, то $p = 4$ – не простое; если $p + 5 = 16$, то $p = 11$ – удовлетворяет условию, и это значение p и будет наименьшим.

Примечание: задачу можно решить и последовательным перебором простых чисел, начиная с p=2.

Критерии: Только ответ (в том числе с проверкой) – 0 баллов. Верный ответ при наличии верного решения (в том числе найденное перебором всех (!) простых p до 11) – 7 баллов. Задача сведена к исследованию факта, что $(5 + p)$ – простое число, но не доведена до конца или далее с ошибкой – 3 балла.

8.3. Дан ромб $ABCD$, причем $\angle BCD = 60$∘. На сторонах AB и BC взяты соответственно точки P и Q так, что $AP = BQ$. Докажите, что треугольник DPQ равносторонний.



Решение: Диагональю BD ромб разбивается на два равносторонних треугольника ABD и CBD.

Рассмотрим треугольники BPD и CQD. Они равны по первому признаку равенства треугольников. Откуда ∠PDB = ∠QDC и DB = DQ. Тогда треугольник DPQ – равнобедренный.

Рассмотрим треугольники ADP и BDQ. Они также равны по первому (или третьему) признаку равенства треугольников. Тогда ∠ADP = ∠BDQ.

Рассмотрим угол ADC: ∠ADC = 120∘ = ∠ADP + ∠PDB + ∠BDQ + ∠QDC = 2 (∠PDB + ∠BDQ) = 2∠PDQ, откуда ∠PDQ = 60∘. Т.е. треугольник DPQ – равнобедренный с углом 60∘ при вершине, т.е. равносторонний.

Критерии: 7 баллов – верное ответ при наличии верного решения. Частично верное продвижение в решении – 3-5 баллов.

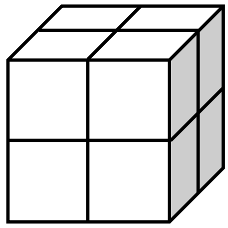
8.4. После окончания олимпиады дети расходились по домам парами, делясь впечатлениями. В каждой паре мальчик и девочка. Оказалось, что в каждой паре мальчики решили задач либо вдвое больше, либо вдвое меньше, чем девочки. Могло ли общее количество решенных всеми детьми задач быть равно 2000?

Ответ: Не могло.

Решение: Заметим, что число решенных задач в каждой паре детей делится на 3. Это означает, что суммарное число решенных задач должно делиться на 3. Однако 2000 на 3 не делится.

Критерии: Только ответ – 0 баллов. 7 баллов ставить при наличии верных рассуждений.

8.5. У малыша Егора есть восемь цветных кубиков, на гранях каждого из которых записаны числа от 1 до 6. Егор сложил из имеющихся кубиков большой куб (куб вдвое большего размера, чем исходные кубики), как показано на рисунке. Оказалось, что числа, записанные на прилегающих друг к другу гранях кубиков, одинаковы. Может ли сумма всех чисел, записанных на видных гранях сложенного Егором куба, равняться 101?



Ответ. Не может.

Решение. Сумма всех чисел, записанных на гранях этих восьми кубиков равна четному числу (8*(1+2+3+4+5+6) = 8*21 = 168). Так как числа на прилегающих друг к другу гранях кубиков одинаковы, то все числа внутри большого куба разбиваются на пары одинаковых. То есть сумма всех чисел внутри большого куба четна. Значит, и сумма всех чисел на поверхности большого куба также должна быть четной (как разность четных чисел) и не может равняться 101.

Критерии: Только ответ – 0 баллов. 7 баллов ставить при наличии верных рассуждений. Частично верное решение – 3-5 баллов.