Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике 2019-2020 учебный год

Решения

8 класс

1. *Ответ: не существуют*.
Решение 1. Среди четырех последовательных целых чисел есть число, кратное 3, значит и их произведение будет кратно 3, а 20192020 на 3 не делится.
Решение 2. $65\cdot66\cdot67\cdot68 = 19545240 < 20192020 < 20748024 = 66\cdot67\cdot68\cdot69$.
2. *Решение 1*. $k(n-k+1)-n=(n-k)(k-1)\geq 0$.
Решение 2. Если $k = 1$ или $n = k$, то получаем равенство.
Пусть $k > 1$ и $n=d\cdot k$, где $d > 1$.Нам надо показать, что $n-k+1 > d$.
$n-k+1 = d\cdot k-k+1 = k(d-1)+1 \geq 2\cdot(d-1)+1 = 2d-1 > d$.
3. *Решение*. Пронумеруем монеты 1, 2, …, 6. Взвесим 1 и 2 монеты, 3 и 4, 5 и 6.
Если на весах равенство, то обе монеты настоящие. Если на весах неравенство, то более легкая монета фальшивая.
Таким образом, либо среди трех взвешиваний есть два равенства, и мы нашли 4 настоящие монеты, тогда оставшиеся — фальшивые, либо два раза было неравенство, и мы нашли две фальшивые монеты.
4. *Решение*. Пусть высота AE и прямая, проходящая через точку H и параллельная BC пересекаются в точке K.
Покажем, что треугольники AKH и CHB равны.
Так как $HK \parallel BC$ и $BC \perp AE$, то $\angle HKA=90°=\angle BHC$. $\angle HCB=90° - \angle ABC = \angle KAH$, $BC = HA$.
Треугольники равны по стороне и двум углам.
Из равенства треугольников $HK = HB$, следовательно треугольник BHK — равнобедренный, $\angle HKB = \angle HBK$. Но так как $HK \parallel BC$, $\angle HKB = \angle KBC$, то есть BK — биссектриса угла B.
5. *Ответ: 17*.
Решение. Так как вертикальные и горизонтальные звенья чередуются, то их поровну, то есть по 7.
Рассмотрим горизонтальные ребра. Все они находятся на разных линиях, пронумеруем их сверху вниз. Все точки пересечения находятся на этих звеньях.
На звене 1 нет ни одной точки пересечения, так как выше этого звена нет точек ломаной.
Аналогично на звене 7 нет точек пересечения.
На звене 2 может быть не более двух точек пересечения, так как выше этого звена только две точки ломаной. (Аналогично на звене 6 не более двух точек)
На звене 3 может быть не более четырех точек пересечения, так как выше ее 4 вершины ломаной. (Аналогично на звене 5 не более четырех точек)
На звене 4 может быть не более пяти точек пересечения, так как если бы на нем было 6 точек (или больше), то было бы 6 вертикальных звеньев, пересекающих это звено, плюс два вертикальных звена, выходящих из концов этого звена, то есть всего вертикальных звеньев было бы не менее 8-ми, а их 7.
Итого, всего точек пересечения не больше 2+4+5+4+2=17.
Пример ломаной с 17-ю точками пересечения см. на рис.