8 класс

8.1. Докажите, что для любых натуральных чисел a и b число $4a^2+4ab+4a+2b+1$ является составным.

Решение. Заметим, что $4a^2+4ab+4a+2b+1=(4a^2+4a+1)+2b+4ab=$ $=(2a+1)^2+2b(2a+1)=(2a+1)(2a+2b+1)$. Так как числа a и b натуральные, то каждая из скобок больше 1. Поэтому число – составное.

Комментарий. Разложение на множители получено, но не проверено, что оба множителя больше 1 – 5 баллов.

Замечание. Другое решение можно получить, заметив, что $4a^2+4ab+4a+2b+1=(2a+b+1)^2-b^2$.

8.2. Пятеро друзей сыграли друг с другом по несколько партий (не обязательно одинаковое количество) в настольный теннис (ничьих не бывает). После игр первый заметил, что у него побед на 4 больше, чем поражений; второй и третий заметили, что у каждого из них поражений на 5 больше, чем побед. Четвертый заметил, что у него побед столько же, сколько поражений, а пятый, что он с каждым из остальных сыграл поровну партий. Мог ли пятый выиграть во всех партиях?

Ответ. Не мог.

Решение. Предположим, что пятый выиграл во всех партиях. В каждой партии один из игроков выигрывает, другой – проигрывает. Поэтому количество побед должно равняться количеству поражений. Из высказываний первых четырех ребят следует, что у них побед на 6 меньше, чем поражений. Значит, количество побед пятого игрока должно равняться 6 (он не проигрывал). Но количество его побед должно делиться на 4, так как, по его утверждению, он одержал равное количество побед над каждым из соперников, а 6 на 4 не делится. Противоречие.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.
Замечено, что суммарное количество побед равно количеству поражений – 1 балл.

8.3. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL. На стороне AC взята точка P так, что LA – биссектриса угла BLP. Докажите, что если $BL = CP$, то угол ABC в два раза больше угла BCA.

Решение. Из условия следует, что треугольники APL и ABL равны по второму признаку (см. рис. 1). Тогда $PL = BL$. Но по условию $BL = CP$. Значит, $CP = PL$. Тогда $\angle PLC=\angle PCL$, и внешний угол APL треугольника CPL в два раза больше угла PCL. С другой стороны, $\angle ABC=\angle ABL=\angle APL$. Утверждение доказано.

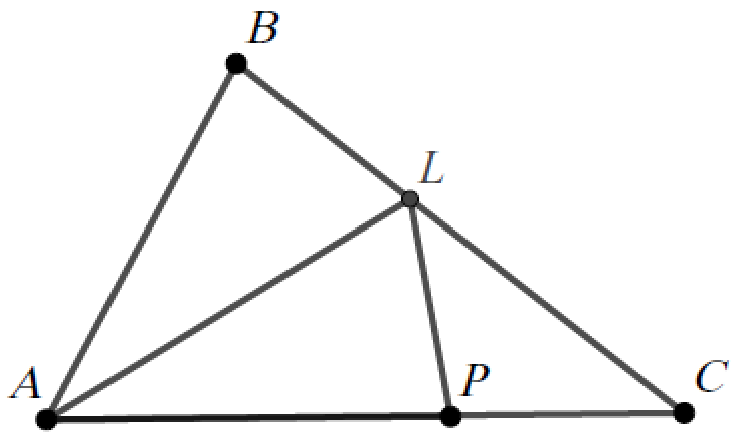

Рис. 1

Комментарий. Доказано равенство треугольников APL и ABL – 2 балла.
Доказано, что $CP = PL$ – 1 балл.

8.4. В турнире по шахматам каждый из 10 игроков сыграл с каждым по одной партии, и Петя занял последнее место (набрал меньше очков, чем любой другой участник). Потом двоих игроков дисквалифицировали, и все очки, набранные во встречах с ними, аннулировали, и этих двух игроков исключили из таблицы. Оказалось, что в результате Петя стал победителем турнира (набрал больше очков, чем любой другой участник). Сколько очков в итоге (после дисквалификации игроков) мог набрать Петя? За победу дается 1 очко, за ничью – 0,5 очка, за поражение – 0 очков.

Ответ. 4 очка.

Решение. В турнире с 10 игроками, проходящем в 1 круг, разыгрывается $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ очков. Поэтому найдется игрок, набравший не более $45 : 10 = 4{,}5$ очков. Значит, игрок, занявший абсолютное последнее место, набрал не более 4 очков. Аналогично, в турнире с $10 - 2 = 8$ игроками, проходящем в 1 круг, разыгрывается $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ очков. В таком турнире найдется игрок, набравший не менее $28 : 8 = 3{,}5$ очков. Значит, игрок, занявший абсолютное первое место (после примененной дисквалификации), набрал не менее 4 очков. Таким образом, Петя мог набрать только 4 очка.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.
Верный ответ получен рассмотрением примера – 1 балл.
Верно доказана только одна из двух оценок на количество очков у Пети (до или после дисквалификации) – 3 балла.

Замечание. Описанный в условии турнир возможен. Приводить пример турнира не требуется, так как из условия следует, что такой турнир существует. Баллы за отсутствие такого примера не снимаются.

8.5. Даны положительные числа *a*, *b*, *c*, *d*. Известно, что любые два из них отличаются не более чем в 3 раза. Докажите, что $a^2+b^2+c^2+d^2<2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$.

Решение. Так как числа отличаются не более чем в 3 раза, то каждое из них не больше суммы остальных. Более того, если $a\le b\le c\le d$, то $a<b+c+d$, $b<a+c+d$, $c<a+b+d$, $d\le a+b+c$. Умножив первое неравенство на *a*, второе – на *b*, третье – на *c*, четвертое – на *d*, получим: $a^2<ab+ac+ad$, $b^2<ba+bc+bd$, $c^2<ca+cb+cd$, $d^2\le da+db+dc$. Сложив полученные неравенства, получим требуемое.

Комментарий. Замечено, что каждое из чисел не больше суммы остальных трех чисел – 2 балла.

Замечание. Существуют и другие решения.