Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2019 – 2020 учебном году

8 класс

Время выполнения заданий — 4 часа

8.1. *Одуванчик утром распускается, этот и следующий день цветёт жёлтым, на третий день утром становится белым, а к вечеру облетает. Вчера днём на поляне было 20 жёлтых и 14 белых одуванчиков, а сегодня — 15 жёлтых и 11 белых. Сколько жёлтых одуванчиков было на поляне позавчера? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.*

Решение: Все жёлтые одуванчики позавчера — это белые одуванчики вчера и белые одуванчики сегодня. Значит, позавчера было $14 + 11 = 25$ жёлтых одуванчиков.

Ответ: 25 одуванчиков.

Примечание: Количество жёлтых одуванчиков вчера и сегодня для решения задачи не нужно.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Ответ без обоснования ИЛИ неверный ответ	0 баллов

8.2. *Улитка ползёт с постоянной скоростью вокруг циферблата часов по окружности против часовой стрелки. Она стартовала в* 12:00 *с отметки* 12 *часов, и закончила полный круг ровно в* 14:00 *того же дня. Какое время показывали часы, когда улитка в ходе своего движения встречалась с минутной стрелкой? Ответ обоснуйте.*

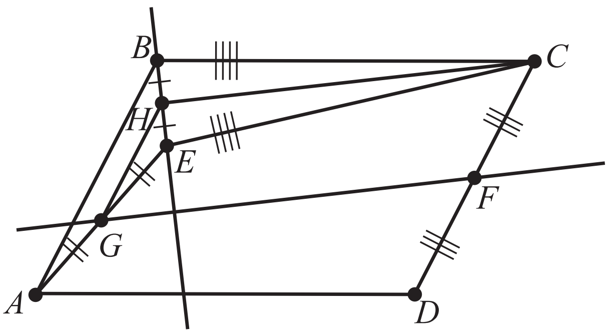
Решение: За два часа движения улитка описала полный круг, минутная стрелка — два полных круга. Вместе они описали три полных круга. Значит, один круг улитка и стрелка в сумме проходят за $120 : 3 = 40$ минут — и это есть время между их последовательными встречами. Значит, время, когда минутная стрелка встречалась с улиткой, это 12:40 и 13:20.

Ответ: 12 часов 40 минут и 13 часов 20 минут.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
Задача верно сведена к уравнению или системе уравнений, которая не решена или решена неверно	5 баллов
Найдено, и проверено, что оно подходит, только одно значение 12,40 или 13,20	3 балла
Верный ответ без обоснования	1 балл

8.3. *Внутри параллелограмма $ABCD$ взяли точку E так, что $CE = CB$. Пусть F и G — середины отрезков CD и AE соответственно. Докажите, что прямая FG перпендикулярна прямой BE.*



К решению задачи 8.3

Решение: Пусть H — середина отрезка BE. Тогда GH — средняя линия треугольника ABE, следовательно,

$$GH = \frac{AB}{2} = \frac{CD}{2} = CF$$

и прямые GH, AB и CD параллельны. Тогда у четырёхугольника $HCFG$ противоположные стороны GH и CF равны и параллельны, поэтому этот четырёхугольник — параллелограмм. Значит, прямая FG параллельна прямой CH, и нам достаточно показать перпендикулярность прямых CH и BE. Эта перпендикулярность вытекает из того, что треугольник BCE — равнобедренный, значит его медиана CH является также и его высотой.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное доказательство	7 баллов
Рассмотрены обе геометрические конструкции (см. пункт на 2 балла), но доказательство не завершено	5 баллов
Рассмотрена одна из двух геометрических конструкций: 1) средняя линия GH в треугольнике ABE или 2) медиана FH в треугольнике BFC	2 балла
Любые геометрические построения и рассуждения, которые в явном виде не ведут к доказательству	0 баллов

8.4. *Известно, что $abc = 1$. Вычислите сумму*

$$\frac{1}{1+a+ab} + \frac{1}{1+b+bc} + \frac{1}{1+c+ca}.$$

Решение: Заметим, что

$$\frac{1}{1+a+ab}=\frac{1}{abc+a+ab}=\frac{1}{a(1+b+bc)}=\frac{abc}{a(1+b+bc)}=\frac{bc}{1+b+bc}.$$

Аналогично, заменяя 1 на число abc, имеем

$$\frac{1}{1+c+ca}=\frac{ab}{1+a+ab}=\frac{ab^2c}{1+b+bc}=\frac{b}{1+b+bc}.$$

Тогда

$$\frac{1}{1+a+ab}+\frac{1}{1+b+bc}+\frac{1}{1+c+ca}=\frac{bc}{1+b+bc}+\frac{1}{1+b+bc}+\frac{b}{1+b+bc}=1.$$

Ответ: 1.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Верный ответ получен рассмотрением частных случаев (в любом количестве)	1 балл
Верный ответ без обоснования ИЛИ неверный ответ ИЛИ алгебраические преобразования, к ответу не приводящие	0 баллов

8.5. *За завтраком мама ежедневно дает Серёже или* 1 *бутерброд и* 3 *конфеты, или* 2 *бутерброда и* 4 *конфеты или* 3 *бутерброда и* 5 *конфет. Через несколько дней оказалось, что Серёжа съел ровно* 100 *бутербродов. Мог ли он при этом за то же время съесть ровно* 166 *конфет? Ответ обоснуйте.*

Решение:

Способ 1. Предположим, что такое произошло. Заметим, что каждый день Петя съедает на 2 конфеты больше, чем бутербродов. Значит, процесс питания занял ровно $\frac{166-100}{2}=33$ дня. Но за 33 дня Петя мог съесть не более $3\cdot 33=99$ бутербродов. Противоречие.

Способ 2. Пусть x дней Серёжа съедает 1 бутерброд и 3 конфеты, y дней 2 бутерброда и 4 конфеты и z дней 3 бутерброда и 5 конфет. Тогда имеем, что $x+2y+3z=100$, а количество съеденных конфет равно $3x+4y+5z$. Решим систему $\begin{cases} x+2y+3z=100\\ 3x+4y+5z=166\end{cases}$ в целых неотрицательных числах. Вычтем из второго уравнения первое. После сокращения на 2 получим $x+y+z=33$, откуда $z=33-x-y$. Подставим найденное значение z в первое уравнение: $x+2y+3(33-x-y)=100$, то есть $-2x-y=1$. Противоречие, так как в левой части стоит отрицательное число, а в правой — положительное. Значит, система в целых неотрицательных числах решений не имеет, и съесть ровно 166 конфет Серёжа не мог.

Примечание: Можно получить все решения системы: ими являются тройки вида $(t,\ -2t-1,\ t+34)$. Противоречие будет заключаться в невозможности одновременного выполнения неравенств $t \geqslant 0$ и $-2t-1 \geqslant 0$.

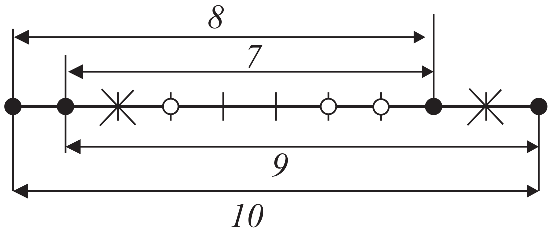
Ответ: Не мог.

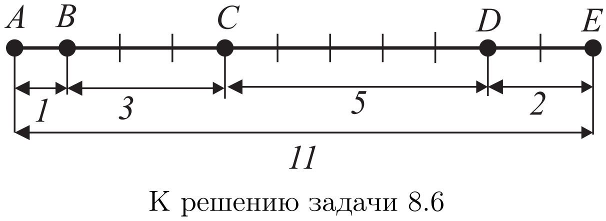
Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Указано, что разница между съеденными конфетами и бутербродами увеличивается ровно на 2 каждый день	3 балла
Задача верно сведена к анализу системы линейных уравнений, но этот анализ не проведён	2 балла
Ответ без обоснования или иллюстрация ответов конкретными примерами (в любом количестве)	0 баллов

8.6. *На некотором отрезке отметили его концы и три внутренние точки. Оказалось, что все попарные расстояния между пятью отмеченными точками различны и выражаются целым числом сантиметров. Какова наименьшая возможная длина отрезка? Ответ обоснуйте.*

Решение: Точек 5, попарных расстояний, следовательно, 10. Если все они выражаются целым положительным числом сантиметров и различны, среди них есть хотя бы одно, не меньшее 10. Значит, длина отрезка не меньше 10. Пусть длина отрезка ровно 10. Тогда попарные расстояния — все числа от 1 до 10. Среди них есть длина 9. Значит, обязательно отмечена точка, отстоящая на 1 см от одного из концов отрезка, пусть от левого — см. рисунок сверху, отмеченные точки — чёрные. Тогда не могут быть отмечены точки, отстоящие на 1 см от правого конца,





К решению задачи 8.6

и на 2 см от левого (они на рисунке зачёркнуты), иначе есть два отрезки длины 1 см. Чтобы возникла длина 8 см, необходимо отмечать точку, отстоящую от правого конца на 2 см. Теперь нельзя отмечать точки, отстоящие от отмеченных на 1 или 2 см (белые точки на рисунке). Остаются две точки, но каждая из них является серединой отрезка между какими-то уже отмеченными, поэтому их отметить тоже нельзя. Значит, отметить нужным образом 5 точек на отрезке длины 10 невозможно, и длина отрезка строго больше 10 см.

Эта длина равняется целому числу сантиметров, так как она реализует расстояние между отмеченными точками — концами отрезка. Значит, она не меньше 11 см. Покажем нужное расположение отмеченных точек на отрезке длины 11. Пусть отмеченные точки (слева направо) — это точки A, B, C, D и E. Пусть $AB = 1$, $BC = 3$, $CD = 5$, $DE = 2$ — все расстояния в сантиметрах (рисунок снизу). Тогда $AC = 4$, $AD = 9$, $AE = 11$, $BD = 8$, $BE = 10$, $CE = 7$ — все 10 расстояний разные.

Ответ: 11 сантиметров.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Доказано, что на отрезке длины 10 отметить точки нужным образом нельзя, но примера на отрезке длины 11 см нет.	5 баллов
Приведён пример верного расположения точек на отрезке длины 11, не обосновано, что невозможна длина 10	2 балла
Верный ответ без обоснования	1 балл
Неверные примеры расположения точек ИЛИ верные расположения точек на отрезках длины большей 11 см	0 баллов