ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ. 2019–2020 уч. г.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП. 9 КЛАСС

**Задания, ответы и критерии оценивания**

*Каждое задание оценивается максимально в 7 баллов*

**9.1.** Даны четыре последовательных натуральных числа. Сумма первых трех равна $A$, а сумма последних трех равна $B$. Может ли произведение $AB$ быть равным 20192019?

**Ответ**: нет, не может.

**Решение 1**: Пусть даны числа $a$, $a$+1, $a$+2 и $a$+3. По условию, $A = a+a+1+a+2 = 3a+3$, а $B = a+1+a+2+a+3 = 3a+6$, т.е. и $A$, и $B$ кратны 3 (как суммы трех последовательных чисел). Тогда произведение $AB$ должно делиться на 9, но 20192019 на 9 не делится (сумма цифр равна 24).

**Решение 2**: Так как $A = 3a+3$, то $B = 3a+6 = A+3$. Очевидно, $A$ и $B$ – натуральные числа. Тогда $AB = A(A + 3)$. Предположим, что произведение может равняться 20192019:

$A(A + 3) = 20192019$,

$A^2 + 3A - 20192019 = 0$,

$D = 9 + 4 \cdot 20192019 = 80768085$.

Для того, чтобы число $A$ было натуральным, $\sqrt{D}$ также должно быть числом натуральным, т.е. 80768085 должно быть квадратом некоторого натурального числа. Но число 80768085 оканчивается на 85 и квадратом не является (делится на 5, но не делится на 25). А значит, число $A$ не натуральное. Противоречие.

**Критерии**: Только ответ – 0 баллов. Задача сведена к исследованию кратности трём чисел $A$ и $B$, но не доведена до конца – 3 балла. Задача сведена к исследованию уравнения $A^2 + 3A - 20192019 = 0$, но не доведена до конца – 3 балла. 7 баллов ставить за полное верное решение.

**9.2.** Графики функций $y = ax^2 + bx + 1$ и $y = x^2 + cx + d$ пересекаются в точке с координатами (2; 4). Чему равно значение выражения $4a + d$, если $b + c = 1$?

**Ответ**: 1.

**Решение**: Т.к. графики проходят через точку с координатами (2; 4), то $4 = 4a + 2b + 1$ и $4 = 4 + 2c + d$. Откуда $4a + 2b = 3$, а $2c + d = 0$, или $4a = 3 - 2b$, $d = -2c$. Суммируем полученные выражения: $4a + d = 3 - 2b - 2c = 3 - 2(b + c) = 3 - 2 = 1$. *Примечание*: Условию удовлетворяют функции $y = ax^2 + bx + 1$ и $y = x^2 + cx + d$ при $a = 1$, $b = -1/2$, $c = 3/2$, $d = -3$.

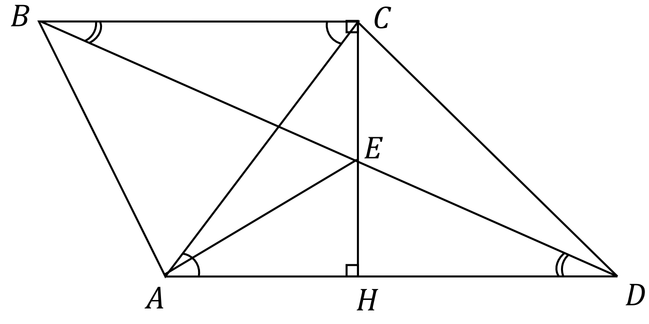
**Критерии:** Только ответ – 0 баллов. Если решение найдено подбором подходящих значений $a$, $b$, $c$ и $d$ – 3 балла. Верно найдены значения выражений $4a + 2b = 3$ и $2c + d = 0$, но дальнейших продвижений в решении нет (или далее решение не верно) – 4 балла. 7 баллов ставить за полное верное решение.

**9.3.** Дана трапеция $ABCD$, причем $AD \| BC$, $BC = AC = 5$, а $AD = 6$. Угол $ACB$ в два раза больше угла $ADB$. Найдите площадь трапеции.

**Ответ:** 22.

**Решение:** Из вершины C опустим высоту CH на основание AD. Точку пересечения BD и CH обозначим E.

Обозначим угол ∠ADB = α = ∠CBD (накрест-лежащие), тогда ∠ACB = 2α = ∠CAD (накрест-лежащие). Треугольник ACB равнобедренный по условию, тогда ∠ABC = ∠BAC = 90∘ – α, ∠BAD = ∠BAC + ∠CAD = 90∘ – α + 2α = 90∘ + α.




Угол ∠ABE = ∠ABD = ∠ABC – ∠CBD = 90∘ – 2α = ∠BCH – ∠ACB = ∠ACH = ∠ACE. Т.е. четырехугольник ABCE вписан в окружность (∠ABE = ∠ACE), причем BE – диаметр этой окружности (∠BCE = ∠BCH = 90∘), а значит угол ∠BAE = 90∘, а ∠EAD = ∠BAD – ∠BAE = 90∘ + α – 90∘ = α = ∠ADB = ∠ADE. Значит треугольник AED – равнобедренный, EH – высота и медиана, тогда AH = HD = AD:2 = 3.

Высоту CH найдем из прямоугольного треугольника ACH: $CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$.

Площадь трапеции равна $\frac{BC+AD}{2} \cdot CH = \frac{5+6}{2} \cdot 4 = 22$.

**Критерии**: Только ответ – 0 баллов. 7 баллов – верное ответ при наличии верного решения. Частично верное продвижение в решении – 3-5 баллов.

**9.4.** Дима и Цырен играют в игру. В начале игры на доске написано число 0. За ход игрок прибавляет к написанному числу любое натуральное число не больше 10 и результат записывает на доску вместо исходного числа. Выигрывает тот, кто первым получает трехзначное число. Начинает игру Дима. Кто выиграет при правильной игре?
**Ответ**: Маша.
**Решение**: Тот из игроков, кто сможет получить числа: 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89 выиграет. Действительно, начиная с единицы следующий игрок сможет попасть только на числа 2, …, 11. Откуда другой игрок перейдет в 12 и т.д. С числа 89 игрок попадет на числа 90, …, 99 и следующий ход будет победным. Таким образом первому игроку достаточно сделать ход в 1 и дальше переходить в числа 12, 23, …, 89.
**Критерии:** Только ответ – 0 баллов. Присутствует попытка анализа выигрышных позиций – 2-3 балла. Полное верное решение – 7 баллов.

**9.5.** Квадратное поле 5 на 5 метров разделено на 25 равных участков 1 м на 1 м. В каждом участке сидит по кузнечику. В некоторый момент каждый кузнечик перепрыгнул на соседний по горизонтали или вертикали участок поля. Останется ли при этом участок, на котором не окажется ни одного кузнечика?
**Ответ**: да, останется.
**Решение:** Раскрасим поле в шахматном порядке. Так как общее число клеток поля 5×5 нечетно (= 25), то черных и белых клеток не может быть поровну. Пусть для определенности черных клеток больше. Тогда кузнечиков, сидящих на белых клетках, меньше, чем черных клеток. Поэтому хотя бы одна из черных клеток останется пустой, так как на черные клетки перепрыгивают только кузнечики, сидящие на белых клетках.
**Критерии:** Только ответ – 0 баллов. Идея раскраски, но решение не закончено – 3 балла. Полное верное решение – 7 баллов.