

## Решение 10 класс

**1. Ответ.** 1007,5 .

**Первое решение.** Раскрыв скобки, получим  $ab - (a + b)x = cd - (c + d)x$  . Подставив

$d = 2015 - a$  и  $b = 2015 - c$  , получаем

$a(2015 - c) - (a + 2015 - c)x = c(2015 - a) - (c + 2015 - a)x$  . Сократив и  
приведя подобные,

получим  $(a - c)2015 = 2(a - c)x$  . Учитывая, что  $a \neq c$  , получаем  $2x = 2015$  , то есть

$x = 1007,5$  .

**Второе решение.** Поскольку  $c = 2015 - b$  и  $d = 2015 - a$  , параболы  $y = (x - a)(x - b)$  и  $y = (x - c)(x - d)$  симметричны относительно прямой  $x = 2015/2$  . Значит, они пересекаются в

точке, лежащей на этой прямой. Если бы эти параболы имели еще одну общую точку, то симметричная ей точка также лежала бы на обеих параболах, то есть наше уравнение имело бы как минимум три различных корня. Но тогда бы эти параболы совпадали. А это противоречит условию, так как в этом случае  $a = d = 2015/2$  и  $b = c = 2015/2 = a$  .

**2.** Запишем равенство  $a_2^2 = a_1 a_3$  . Имеем:  $(1 + x^3 + x^4)^2 = (1 + x^2 + x^3)(1 + x^4 + x^5)$  .

Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим  $x^4 + x^3 = x^5 + x^2$  . Преобразуем:

$0 = x^5 + x^2 - x^4 - x^3 = x^2(x^3 + 1 - x^2 - x) = x^2(x - 1)^2(x + 1)$  . Откуда либо  $x = 0$  ,  
либо  $x = -1$  ,

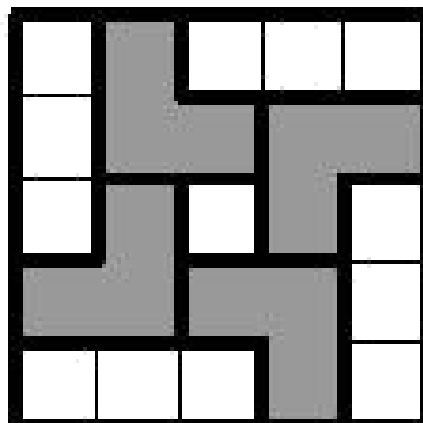
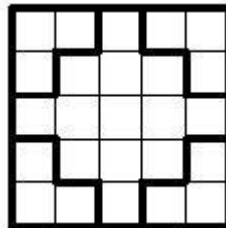
либо  $x = 1$  . В первых двух случаях  $a_n = 1$  для всех  $n$  , в третьем случае  $a_n = 3$  для всех  $n$  . Во

всех этих случаях выполняется требуемое равенство  $a_n^2 = a_{n-1} a_{n+1}$  .

**Замечание.** После получения равенства  $x^4 + x^3 = x^5 + x^2$  можно действовать и по-другому. Раскрывая скобки в равенстве  $a^2 = a \cdot a$  и приводя подобные слагаемые, получаем, что оно равносильно равенству  $x^{n+2} + x^{n+1} = x^{n+3} + x^n$ , которое получается из  $x^4 + x^3 = x^5 + x^2$  домножением на  $x^{n-2}$ .

### 3. Ответ. 4.

Пусть клетки квадрата  $5 \times 5$  покрашены так, что больше ни одного уголка покрасить нельзя. Рассмотрим 4 уголка, отмеченных на рисунке. Так как ни один из этих уголков покрасить нельзя, то в каждом из них покрашено по крайней мере по одной клетке. Заметим, что одним уголком нельзя покрасить клетки двух отмеченных уголков. Значит, всего покрашено не меньше 4 уголков.



На следующем рисунке показано, как покрасить 4 уголка так, чтобы больше ни одного уголка покрасить было нельзя.

#### 4. Ответ. 5.

Заметим, что нечетное полупростое число может быть лишь суммой двойки и нечетного простого числа.

Покажем, что три подряд идущих нечётных числа  $2n + 1$ ,  $2n + 3$  и  $2n + 5$ , больших 25, не могут быть полупростыми одновременно. Предполагая противное, получаем, что числа  $2n - 1$ ,  $2n + 1$  и  $2n + 3$  – простые, и все они больше 3. Но одно из этих трёх чисел делится на 3. Противоречие. Заметим, что среди любых шести последовательных чисел есть три подряд идущих нечетных числа; значит, последовательных полупростых чисел не может быть больше пяти. Пять подряд идущих чисел могут быть полупростыми; например,  $30 = 17 + 13$ ,  $31 = 29 + 2$ ,  $32 = 19 + 13$ ,  $33 = 31 + 2$ ,  $34 = 23 + 11$ . **Замечание.** Существуют и другие примеры.

Отрезок  $C_1M$  является медианой прямоугольного треугольника  $CC_1A$ , поэтому

$$C_1M = \frac{AC}{2} = MA \quad (\text{см. рис.}). \quad \text{Тогда} \quad \angle C_1MA = \pi - 2\angle BAC. \quad \text{Аналогично,} \quad \angle A_1MC_1 = \pi - 2\angle BCA.$$

Отсюда  $\angle C_1MA + \angle A_1MC_1 = 2(\pi - \angle BAC - \angle BCA) = 2\angle ABC$ , а тогда

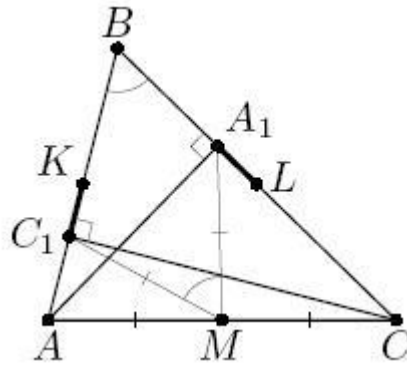
$$\angle A_1MC_1 = \pi - (\angle AMC_1 + \angle CMA_1) = \pi - 2\angle ABC.$$

5. Отрезок  $C_1M$  является медианой прямоугольного треугольника  $CC_1A$ , поэтому

$$C_1M = \frac{AC}{2} = MA \quad (\text{см. рис.}). \quad \text{Тогда} \quad \angle C_1MA = \pi - 2\angle BAC. \quad \text{Аналогично,} \quad \angle A_1MC_1 = \pi - 2\angle BCA.$$

Отсюда  $\angle C_1MA + \angle A_1MC_1 = 2(\pi - \angle BAC - \angle BCA) = 2\angle ABC$ , а тогда

$$\angle A_1MC_1 = \pi - (\angle AMC_1 + \angle CMA_1) = \pi - 2\angle ABC.$$



Из условия следует, что  $\angle ABC = \pi - 2\angle ABC$ . Отсюда  $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$ . По условию,

треугольник  $ABC$  – не равнобедренный; пусть, например,  $AB < BC$ . Тогда из прямоугольного треугольника  $ABA_1$  получаем  $BA_1 = BA \cos(\pi/3) = AB/2$ . Значит,

$$AL = BL - BA = \frac{BC - AB}{2}. \text{ Аналогично, } KC = BC - BK = \frac{BC - AB}{2} = AL. \text{ Утверждение}$$

доказано.