Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников
2019 – 2020 учебный год
Математика
10 класс

МЕТОДИКА ОЦЕНИВАНИЯ ЗАДАНИЙ

Баллы	Правильность (ошибочность) решения.
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

10.1. Может ли квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ с целыми коэффициентами иметь дискриминант равный 23?

Ответ: нет.

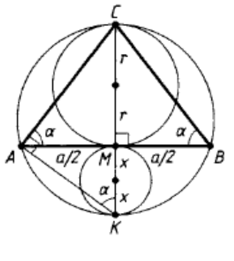
Решение. Допустим, что дискриминант указанного уравнения равен числу 23. Тогда можно записать: $b^2 - 4ac = 23$, и $b^2 - 25 = 4ac - 2$ или $(b - 5)\cdot(b + 5) = 2(2ac - 1)$.

Заметим, что $b - 5$ и $b + 5$ – числа одинаковой чётности, поэтому их произведение, если оно чётно, делится на 4. Правая часть последнего равенства есть чётное число, не делящееся на 4. Получено противоречие, значит, сделанное допущение ложно.

10.2. В окружность вписан равнобедренный треугольник с основанием a и углом при основании α. Кроме того, построена вторая окружность, касающаяся первой окружности и основания треугольника, причём точка касания является серединой основания. Найдите радиус второй окружности.

Ответ: $\frac{a}{4}\, tg\, \alpha$, $\frac{a}{4}\, ctg\, \alpha$.

Решение. Диаметр одной из искомых окружностей − высота данного треугольника, а другой − разность между диаметром описанной окружности и диаметром первой искомой окружности. Пусть CK − диаметр окружности, описанной около равнобедренного треугольника ABC ($AC = BC$, $AB = a$, $\angle A = \angle B = \alpha$). Тогда середина M основания AB принадлежит этому диаметру, а CM и MK − диаметры искомых окружностей. Пусть r и x − радиусы искомых окружностей.



Тогда $r = \frac{1}{2} CM = \frac{1}{2} AM\cdot tg\, \alpha = \frac{a}{4} tg\, \alpha$, $x = \frac{1}{2} MK = \frac{1}{2} AM \cdot ctg\angle AKM = \frac{a}{4} ctg\, \alpha$.

10.3. Володя расставил несколько (возможно 0) шахматных фигур на доску 8×8. Лёня заметил, что в каждом квадрате 2×2 стоит одинаковое количество фигур. А Влад заметил, что в каждом прямоугольнике 3×1 (или 1×3) стоит одинаковое количество фигур. Сколько фигур было выставлено на доску? (Укажите все варианты и докажите, что других нет.)

Ответ: 0 или 64.

Решение. Предположим, что в каждом квадрате 2×2 стоит m фигур, а в каждом прямоугольнике 1×3 − n фигур. Выделим из доски какой-нибудь прямоугольник 2×6. С одной стороны, этот прямоугольник можно разбить на три квадрата 2×2, и значит в нём $3m$ фигур. С другой стороны, его можно разрезать на четыре прямоугольника 1×3, и тогда в нём $4n$ фигур. Получаем соотношение $3m = 4n$, откуда n делится на 3. Но n может принимать значения 0,1, 2, 3. Таким образом, $n = 0$ или $n = 3$. Иными словами, либо все прямоугольники 1×3 пустые, и тогда на доске стоит 0 фигур, либо все прямоугольники 1×3 полностью заняты фигурами, и в этом случае на доске стоят 64 фигуры.

Примечание: Любое верное решение: *7 баллов.*

Пропущен случай нуля фигур, в остальном решение верное: *6 баллов.*

Доказано, что все прямоугольники 1×3 (или все квадраты 2×2) пустые или заполненные, но решение не завершено: *5 баллов.*

Приведён только верный ответ: *1 балл.*

10.4. Докажите, что если сумма $(x^2 + y^2)$ делится на 3 и x,y − целые, то x и y делятся на 3.

Решение. Пусть $x = 3q+r_1$, $y = 3p+r_2$, где r_1 и r_2 остатки от деления на 3, то есть числа 0, 1, 2. Тогда $x^2 + y^2 = (3q+r_1)^2 + (3p+r_2)^2 = 3(3q^2 + 3p^2 + 2qr_1 + 2pr_2) + r_1^2 + r_2^2$. Так как $x^2 + y^2$ делится на 3, то $r_1^2 + r_2^2$ тоже делится на 3. Но $r_1^2 + r_2^2$ может принять значения 0, 1, 2, 4, 5 или 8; из них только 0 делится на 3, откуда $r_1 = r_2 = 0$. Следовательно, x и y делятся на 3.

10.5. В настоящее время есть монеты 1, 2, 5 и 10 рублей. Укажите все денежные суммы, которые можно уплатить как четным, так и нечетным числом монет. (Можно использовать одинаковые монеты.)

Ответ: Любая сумма денег, большая 1 рубля, может быть уплачена как четным, так и нечетным числом монет.

Решение. Любую сумму денег большую 10 рублей, можно составить из монет в 10 и 1 рубль. Четность числа монет можно поменять с помощью размена 10 рублей на 2 монеты по 5 рублей. А сумма денег меньшая 11 рублей может быть представлена с помощью монет по 1 рублю, четность же легко поменять, заменив 2 монеты по 1 рублю на монету в 2 рубля. Таким образом, любая сумма денег, большая 1 рубля, может быть уплачена как четным, так и нечетным числом монет.