**ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ. 2019-2020 ГГ.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП.
10-Й КЛАСС**

№1. Решить уравнение $(x^2-6x-9)^2 = x(x^2-4x-9)$

Решение:

Ясно, что x=0 не является корнем уравнения. Тогда разделим обе части на $x^2 \neq 0$. Получим $\left(x-6-\frac{9}{x}\right)^2 = x-4-\frac{9}{x}$. Пусть $y = x-6-\frac{9}{x}$. Тогда уравнение примет вид $y^2 = y+2$. Очевидно, что $y_1 = -1, y_2 = 2$. Сделав обратную замену, найдём корни исходного уравнения. Ими будут числа -1, 9, $\frac{5+\sqrt{61}}{2}$, $\frac{5-\sqrt{61}}{2}$.

Ответ: -1, 9, $\frac{5+\sqrt{61}}{2}$, $\frac{5-\sqrt{61}}{2}$.

Критерии:

7	решение полностью аргументировано.
6 -5	решение верно, но допущена арифметическая ошибка, в результате которой неверно найден один корень уравнения.
3-4	имеются верные преобразования, уравнение сведено к уравнению 4 степени и подобраны верные целые корни, сделана ошибка при разложении на множители (деление многочлена на двучлен или при ином подходе), в результате чего неверно найдены корни, отличные от -1 и 9. Или же верно сделана замена переменных, но неверно найдены корни уравнения $y^2 = y+2$, в результате чего получен неверный ответ.
1-2	имеются верные преобразования, уравнение сведено к уравнению 4 степени и подобраны верные целые корни.
0	решение отсутствует или полностью неверно .

№2. Доказать, что для любого натурального n $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}<\frac{1}{4}$.

Решение:

$\frac{1}{1\cdot 5}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5}\right)$, $\frac{1}{5\cdot 9}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)$, … , $\frac{1}{(4n-3)\cdot(4n+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)$

Тогда $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4n+1}\right)=\frac{n}{4n+1}<\frac{1}{4}$

Критерии:

7	решение полностью верно и аргументировано.
5	решение верно, но допущена арифметическая ошибка
4	имеются верные рассуждения, но неверно применены

3-2	вспомогательные неравенства или метод математической индукции.
2-1	имеется ряд верных рассуждений, но нужная оценка получена неверно
0	решение отсутствует или полностью неверно .

№3. Доказать, что если $a+b+c \vdots 6$, то $a^3+b^3+c^3 \vdots 6$

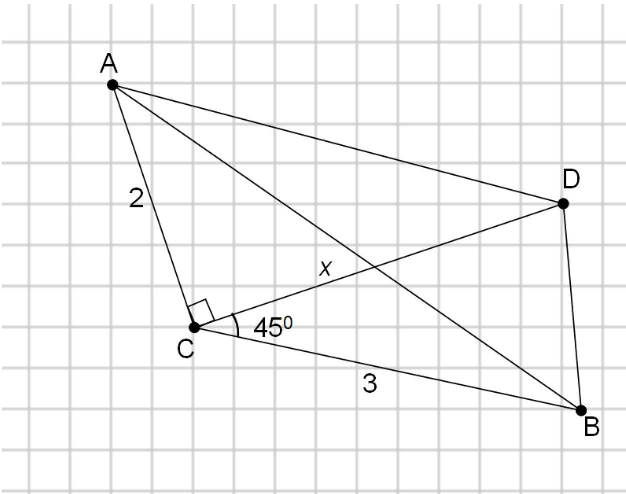
Решение: Так как $a^3+b^3+c^3 = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)+3abc$ и по условию $a+b+c$ – чётное, то или одно из этих чисел - чётное, а два других - нечётные, или все числа чётные. В обоих случаях $abc \vdots 2$, следовательно, $a^3+b^3+c^3 \vdots 6$

Критерии:

7	решение полностью верно и аргументировано.
5- 6	задача решена полностью, но есть небольшие недочёты в обосновании
0	решение отсутствует или полностью неверно .

№4. Найти наименьшее значение выражения $\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-3\sqrt{2}x+9}$

Решение:



Обозначим А= $\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-3\sqrt{2}x+9}$.

Рассмотрим $\Delta ACD(AC=2, CD=x, \angle ACD=90°)$ и $\Delta BCD(BC=3, CD=x, \angle DCB=45°)$

Из ΔACD $AD=\sqrt{4+x^2}$.

Из ΔDCB $BD=\sqrt{x^2+9-2\cdot x\cdot 3\cos 45^0}=\sqrt{x^2-3\sqrt{2}x+9}$

Но тогда $\min A=\min(AD+DB)=AB$.

Из ΔACB $AB=\sqrt{4+9-2\cdot 2\cdot 3\cdot \cos 135^0}=\sqrt{13+6\sqrt{2}}$

Ответ: $\sqrt{13+6\sqrt{2}}$

Критерии:

7	решение полностью верно и аргументировано.
5-6	решение верно, но не обосновано, почему рассматриваются лишь положительные *x*.
3-4	имеются верные рассуждения, но получен неверный ответ из за вычислительной ошибки.
1-2	имеется ряд верных рассуждений, но ответ задачи не получен.
0	решение отсутствует или полностью неверно .

№5. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AL и BT, которые пересекаются в точке I, а их продолжения пересекают окружность, описанную около треугольника ABC в точках E и D соответственно. Отрезок DE пересекает стороны AC и BC в точках F и K соответственно. Доказать, что:

а) четырёхугольник $IKCF$ – ромб;

б) сторона этого ромба равна ромба $\sqrt{DF \cdot EK}$.

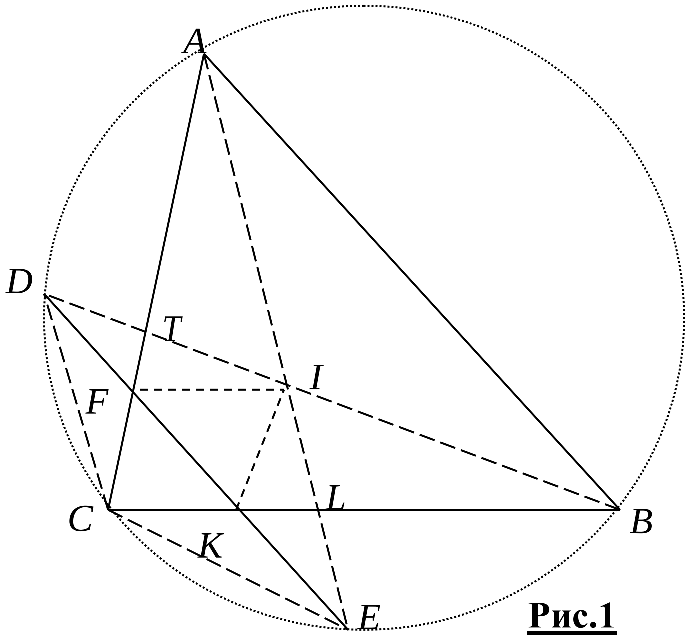


Рис.1

Решение:

а)

$\angle CFK = \angle CFE = \frac{1}{2}(\cup CE + \cup AD) = = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$, (рис.1) Аналогично $\angle CKF = \ = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$, то есть ΔCKF – равнобедренный и $FC = KC$.

Докажем, что $IF \parallel KC$. Так как $\angle CAE = \angle LAB$, $\angle ABL = \angle AEC$, то $\Delta ALB \sim \Delta AEC$ по двум углам, тогда $\frac{AB}{AE} = \frac{BL}{CE} = \frac{AL}{AC}$, $\frac{AE}{CE} = \frac{AB}{BL}$. Так как BD биссектриса $\angle B$, то ED – биссектриса $\angle CEA$, тогда $\frac{AF}{CF} = \frac{AE}{CE} = \frac{AB}{BL} = \frac{AI}{IL}$. По теореме, обратной теореме Фалеса $IF \parallel KC$. Аналогично, $IK \parallel CF$. Таким образом $IKCF$ параллелограмм, а тогда и ромб, так как $FC = KC$.

б) $\Delta DFC \sim \Delta KEC$ по двум углам, так как $\angle FCD = \angle KEC = \frac{1}{2}\angle B$, $\angle FDC = \angle KCE = \frac{1}{2}\angle A$. Значит $\frac{DF}{KC} = \frac{FC}{KE} \Rightarrow KC^2 = KC \cdot FC = DF \cdot KE$.

Критерии:

7	решение полностью верно и аргументировано.
5- 6	задача решена полностью, но есть небольшие недочёты в обосновании
4	доказан бункт а)
3	доказано, что $\Delta ALB \sim \Delta AEC$
1-2	доказано, что $FC = KC$
0	решение отсутствует или полностью неверно .