10-й класс

10.1 Пусть $f(x,y)=kx+\frac{1}{y}$. Докажите, что если $f(a,b)=f(b,a)$ при $a\neq b$, то $f(ab,1)=0$.

Решение. По условию $ka+\frac{1}{b}=kb+\frac{1}{a}$. Преобразуем: $(a-b)\left(k+\frac{1}{ab}\right)=0$. Так как $a-b\neq 0$, то $k+\frac{1}{ab}=0$, $kab+1=0$, а это и означает, что $f(ab,1)=0$.

10.2 Последовательность чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots$ образована по закону: $x_1=1$, $x_{n+1}=1+\frac{x_n^2}{n}$ для $n=1,2,3,\ldots$ Найдите x_{2019}.

Ответ: 2019

Решение. $x_2=1+\frac{1^2}{1}=2$, $x_3=1+\frac{2^2}{2}=3$. Гипотеза: $x_n=n$. Действуем по индукции. Если $x_n=n$, то $x_{n+1}=1+\frac{n^2}{n}=1+n$. Гипотеза подтверждена.

10.3 Все целые числа от 1 до 2n выписали в строку в случайном порядке. Затем к каждому числу прибавили номер того места, на котором оно стоит. Докажите, что среди полученных сумм найдутся хотя бы две, дающие при делении на 2n одинаковый остаток.

Решение. Пусть $S_1, S_2, \ldots, S_{2n}$ − полученные суммы. Тогда $S_1+S_2+\ldots+S_{2n}=$ $=2(1+2+\ldots+2n)=2\cdot\frac{1+2n}{2}\cdot 2n=(1+2n)\cdot 2n$ делится на 2n. Предположим, что остатки от деления на 2n чисел $S_1, S_2, \ldots, S_{2n}$ все различны, т.е. дают набор $0,1,2,\ldots,2n-1$. Тогда число $S_1+S_2+\ldots+S_{2n}$ при делении на 2n даст такой же остаток, как сумма $0+1+2+\ldots+2n-1=(2n-1)\cdot n$, т.е. остаток n и, значит, на 2n не делится. Противоречие.

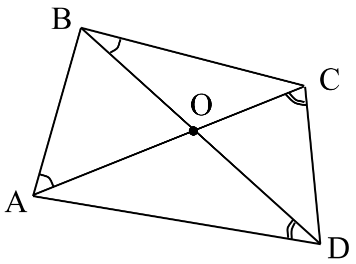
10.4 В один из дней года оказалось, что каждый житель города сделал не более одного звонка по телефону. Докажите, что население города можно разбить не более, чем на три группы так, чтобы жители, входящие в одну группу, не разговаривали в этот день между собой по телефону.

Решение: Проведем индукцию по n-числу жителей города. Если $n\leq 2$, то нечего доказывать. Пусть $n\geq 3$. Пусть m − общее количество звонков в этот день. По условию $m\leq n$. Поэтому найдется житель A, разговаривавший не более, чем с двумя жителями. По предположению индукции всех жителей, кроме A, можно разбить на три группы так, чтобы выполнялось условие задачи (допускается и пустая группа). Житель A заведомо не разговаривал с жителями одной из этих трех групп. Его можно включить в эту группу, и требуемое утверждение сохранится.

10.5 В выпуклом четырехугольнике ABCD $\angle CBD = \angle CAB$, $\angle ACD = \angle ADB$. Докажите, что из отрезков BC, AD, AC можно сложить прямоугольный треугольник.

Решение. См. рис. Треугольники AOD и ADC подобны: угол при вершине A у них общий и по условию равны углы ADO и ACD. Составим равенство отношений соответственных сторон в этих треугольниках:

$\dfrac{AO}{AD} = \dfrac{AD}{AC}$, откуда $AO \cdot AC = AD^2$.



Аналогично из подобия треугольников ABC и OBC получаем $\dfrac{CO}{BC} = \dfrac{BC}{AC}$, откуда $CO \cdot AC = BC^2$. Складывая полученные равенства $AD^2 = AO \cdot AC$ и $BC^2 = OC \cdot AC$, находим

$AD^2 + BC^2 = AO \cdot AC + OC \cdot AC = (AO + OC) \cdot AC = AC \cdot AC = AC^2$.

Обратная теорема Пифагора дает теперь требуемое: треугольник со сторонами AD, BC, AC − прямоугольный.