Ответы и решения. 10 класс.

1. Решение.

По неравенству о средних имеем

$xy + xz \geq 2\sqrt{xy \cdot xz}$

$xy + yz \geq 2\sqrt{xy \cdot yz}$

$xy + yz \geq 2\sqrt{xz \cdot yz}$

Сложим эти неравенства и разделим полученное на 2.

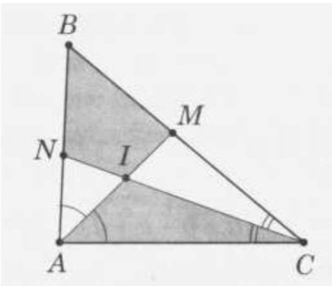
$xyz > xy + xz + yz > x\sqrt{yz} + y\sqrt{xz} + z\sqrt{xy}$.

Деля полученное неравенство на $\sqrt{xyz}$, получаем требуемое.

<u>Замечание.</u> Это решение легче, если переписать данное требуемое неравенство в виде

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leq 1$, $\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{xz}}+\frac{1}{\sqrt{yz}} \leq 1$

2. Решение.



По условию $S_{ALC} = S_{MLNB}$

Прибавив к обеим частям этого равенства S_{CLM}, получим $S_{AMC} = S_{CNB}$

С другой стороны, прибавив S_{ALN} , получим $S_{AMB} = S_{ANC}$.

Значит, $\frac{S_{AMC}}{S_{AMB}} = \frac{S_{CNB}}{S_{ANC}}$.

Поскольку AM – биссектриса угла CAB, то $\frac{S_{AMC}}{S_{AMB}} = \frac{AC}{AB}$.

Аналогично получаем, что $\frac{S_{CNB}}{S_{ANC}} = \frac{BC}{AC}$,

Итак, $\frac{AC}{AB} = \frac{BC}{AC}$, и это означает, что длины сторон треугольника ABC образуют геометрическую прогрессию.

3. Ответ: 45665.

Решение. Пусть x – количество прямоугольников размером 1 x 3, y – количество прямоугольников размера 1 x 4. Тогда $3x + 4y = 60$,   где x, y – целые неотрицательные числа.

Величина $x = \frac{60-4y}{3} = 20 - \frac{4y}{3}$ - целое число, если $y = 3t (t \in Z)$, отсюда $x = 20 \cdot 4t \cdot (0 \leq t \leq 5)$.

В итоге получается 6 решений уравнения $3x + 4y = 60$:

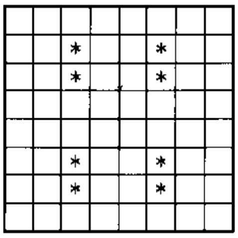
(20; 0), (16; 3), (12; 6), (8; 9), (4; 12), (0; 15) . Количество способов разрезания данного прямоугольника на x прямоугольников размера 1 x 3 и y прямоугольников размера 1 x 4 равно C^{y}_{x+y}.

В итоге получим $C^{0}_{20} + C^{3}_{19} + C^{6}_{18} + C^{9}_{17} + C^{12}_{16} + C^{15}_{15} = 1 + 969 + 18564 + 24310 + 1820 + 1 = 45665$ способов.

4. Ответ: 3014.

Решение. Рассмотрим тройки чисел $(a_1, a_2, a_1 \cdot a_2)$, $(a_3, a_4, a_3 \cdot a_4)$, …, $(a_{2009}, a_{2010}, a_{2009} \cdot a_{2010})$. Произведение чисел каждой тройки положительно (как произведение квадратов двух чисел, отличных от нуля). Значит, среди чисел каждой тройки есть хотя бы одно положительное число (произведение трёх отрицательных чисел отрицательно). Указанные тройки чисел не пересекаются, поэтому среди написанных на доске чисел не менее 1005 положительных. Покажем, что можно выбрать такие 2010 исходных чисел, что на доске окажется 1005 положительных чисел. Для этого сделаем все числа с нечетными номерами (всего их 1005) положительными, а с четными номерами – отрицательными. Тогда каждое произведение будет отрицательно (как произведение двух чисел с разными знаками), и положительными являются только 1005 исходных чисел с нечетными номерами. Следовательно, наибольшее количество отрицательных чисел на доске будет равно 4019 – 1005 = 3014.

5. Ответ: 8 выстрелов.
Решение. Заметим, что если бублик размещён на поле 4 х 4, то одного выстрела не хватит, чтобы гарантированно его ранить. Действительно, если выстрел произведен в клетку, соседнюю со стороной квадрата, то бублик может быть размещён рядом с противоположной стороной. Если же выстрел произведен в одну из четырёх центральных клеток квадрата, то бублик может быть размещён так, что его центр совпадает с клеткой, в которую сделан выстрел. Значит, потребуется сделать не менее двух выстрелов, чтобы гарантированно его ранить. Разбив поле 8 х 8 на четыре квадрата 4 х 4, получим, что для того, чтобы гарантированно ранить бублик, потребуется не менее 8 выстрелов.



Если же сделать 8 выстрелов, так как показано на рис., то мы гарантированно раним бублик.