Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан
Муниципальный тур 2019 года. Решения задач

10 класс

10-1. У Пятачка есть воздушные шарики пяти цветов. Ему удалось расположить их в ряд таким образом, что для любых двух различных цветов в ряду всегда найдутся два соседних шарика этих цветов. Какое наименьшее количество воздушных шариков могло быть у Пятачка?

Ответ. 11 шариков.

Решение. Рассмотрим шарики цвета a. Их соседями должны быть шарики всех 4 остальных цветов. Но у одного шарика не более двух соседей, так что шариков цвета a не менее 2. Это же верно для каждого из 5 цветов, так что всего шариков не менее 10.

Заметим, что какой-то шарик цвета b находится на краю ряда. У него только один сосед, так что у двух шариков этого цвета не более 3 соседей. Поэтому для выполнения условий нам нужно добавить ещё как минимум один шарик цвета b. Так всего понадобится не менее 11 шариков.

Покажем, что 11 шариков хватит. Пусть a, b, c, d, e – цвета шариков. Их можно расположить, например, так: $a\ b\ c\ d\ e\ c\ a\ d\ b\ e\ a$.

Критерии. Только ответ – 0 баллов. Оценка (что шариков не меньше 11) – 4 балла. Пример нужного расположения – 3 балла.

10-2. Действительные числа a, b и c таковы, что $|a| \geq |b + c|$, $|b| \geq |c + a|$ и $|c| \geq |a + b|$. Докажите, что $a + b + c = 0$.

Решение. Возведём в квадрат обе части каждого неравенства:

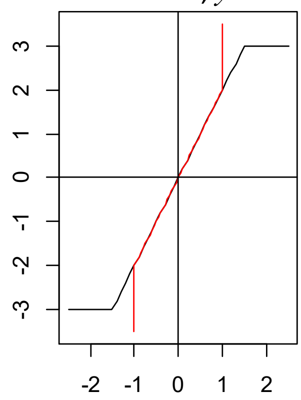
$$\begin{cases} a^2 \geq (b+c)^2 \\ b^2 \geq (c+a)^2 \\ c^2 \geq (a+b)^2 \end{cases}$$

Сложим все три неравенства и после перегруппировки слагаемых получим $(a + b + c)^2 \leq 0$. Отсюда, очевидно, следует, что $a + b + c = 0$.

Критерии. Только ответ – 0 баллов. Разобраны отдельные случаи раскрытия модуля (но не полный перебор) – не более 5 баллов. Полное решение – 7 баллов.

10-3. Решить систему $\begin{cases} 2y = |2x+3| - |2x - 3| \\ 4x = |y+2| - |y - 2| \end{cases}$

Ответ: $-1 \leq x \leq 1$, $y = 2x$.



Решение. Нарисуем графики линий, описанных каждым уравнением. Каждый из них представляет собой ломаную из 3 звеньев.

Первое уравнение: $y = \frac{|2x+3| - |2x-3|}{2}$

$x < -1{,}5$; $y = -3$, при $x > -1{,}5$; $y = 3$, при $-1{,}5 \leq x \leq 1{,}5$; $y = 2x$.

Второе уравнение: $x = \frac{|y+2| - |y-2|}{4}$

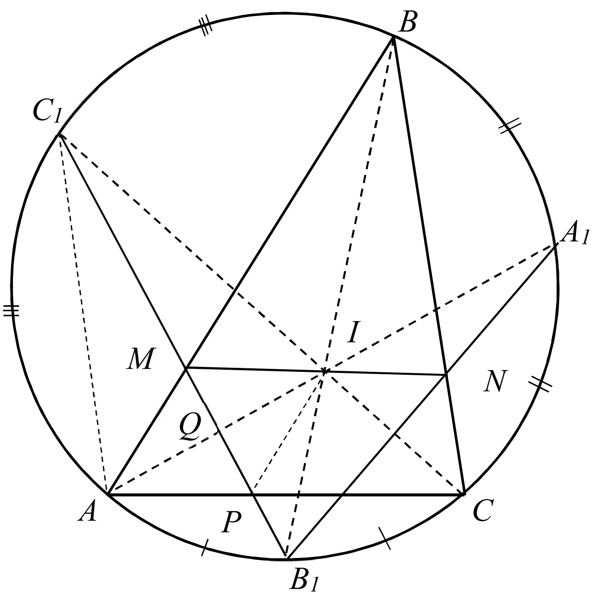
$y < -2$; $x = -1$, при $y > 2$; $y = 1$, при $-2 \leq x \leq 2$; $y = x/2$.

Как мы видим, графики совпадают на промежутке $-1 \leq x \leq 1$. То есть решением будут все точки отрезка прямой $y = 2x$.

Критерии. Полный ответ без достаточного обоснования – 2 балла. Полное решение – 7 баллов.

10-4. В остроугольном треугольнике ABC биссектрисы углов A, B и C пересекают описанную окружность треугольника в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Прямые AB и B_1C_1 пересекаются в точке M, прямые BC и A_1B_1 — в точке N. Верно ли, что прямая MN проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC?

Ответ: да, верно.



Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC (точка I является точкой пересечения биссектрис AA_1, BB_1 и CC_1), и пусть прямая B_1C_1 пересекает сторону AC и биссектрису AA_1 в точках P и Q соответственно (см. рис.). Тогда $\angle AQC_1 = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AC_1} + \overset{\frown}{A_1B_1}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{CA}\right) = 90°$. Поскольку BB_1 — биссектриса, из равенства углов ABB_1 и B_1BC следует равенство дуг CB_1 и B_1A, а значит, и равенство углов AC_1B и B_1C_1C, опирающихся на эти дуги. Поэтому B_1C_1 — биссектриса угла AC_1I. Кроме того, из перпендикулярности прямых AI и B_1C_1 следует, что треугольник AC_1I — равнобедренный, $AC_1 = C_1I$, и значит, CQ — медиана. Поскольку MQ тоже делит AI пополам, отсюда также получается свойство равнобедренности треугольника AMI, $AM = MI$. Аналогично доказывается, что B_1C_1 — биссектриса углов AB_1I и равнобедренность треугольника API. Так как AI — биссектриса угла A, треугольники AMI и API имеют общую сторону AI и два равных прилежащих к этой стороне угла. Значит, эти треугольники равны, и четырёхугольник $AMIP$ — ромб, поэтому $MI \parallel AC$. Аналогично устанавливается, что $NI \parallel AC$, то есть точки M, I и N лежат на одной прямой.

Критерии. Только ответ – 0 баллов. Полное решение – 7 баллов.

10-5. Из 80 одинаковых деталей лего собрали несколько фигурок, причем число использованных деталей во всех фигурках разное. На изготовление трех самых маленьких фигурок ушло 14 деталей, в трех самых больших использовано суммарно 43. Сколько собрали фигурок? Сколько деталей в самой большой фигурке?

Ответ. 8 фигурок, 16 деталей.

Решение. Обозначим число деталей в фигурках через $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, Если $a_3 \leq 5$, то $a_3 + a_2 + a_1 \leq 5 + 4 + 3 = 12 < 14$. Значит, $a_3 \geq 6$.

Аналогично можно рассмотреть три самых больших фигурки: 14 + 15 + 16 = 45 > 43, поэтому $a_{n-2} \leq 13$.

Уберем три самых больших и три самых маленьких фигурки. В оставшихся будет 80 – 14 – 43 = 23 детали, причем в каждой от 7 до 12. Одной фигурки явно не хватит, а три будет лишнего (7 + 8 + 9 = 24). Значит, 23 детали образуют 2 фигурки. Это возможно, причем единственным способом: 23 = 11 + 12.

Имеем 43 = 13 + 14 + 16 – единственное разложение с $a_6 \geq 13$.

Критерии. Только ответ – 0 баллов. Только правильные оценки для a_3 и a_{n-3} – 3 балла. Только обоснованный ответ для числа фигурок – 5 баллов. Полное решение – 7 баллов.