Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

2019/20 учебный год

10 класс

Ответы и решения задач

1. УСЛОВИЕ

Существует ли такое x, что значения выражений $x+\sqrt{2}$ и $x^3+\sqrt{2}$ – рациональные числа?

Решение. Предположим, что требуемое x нашлось. Тогда $x+\sqrt{2}=a$ – рациональное число. Отсюда следует, что $x=a-\sqrt{2}$. Но тогда $x^3+\sqrt{2}=(a-\sqrt{2})^3+\sqrt{2}=a^3-3\sqrt{2}a^2+6a-2\sqrt{2}+\sqrt{2}=a^3+6a-(3a^2+1)\sqrt{2}$. Это число является рациональным только при $3a^2+1=0$ – противоречие.

Ответ. Не существует.

2. УСЛОВИЕ

Найдите все такие пары $(a;\ b)$ действительных чисел a и b, что уравнения $x^2+ax+b^2=0$ и $x^2+bx+a^2=0$ имеют по крайней мере один общий корень.

Решение. Предположим, что $a\neq b$, и пусть x_0 – общий корень уравнений. Подставляя x_0 в уравнения и вычитая одно из другого, получаем

$$(a-b)x_0+b^2-a^2=0,$$

откуда $x_0=a+b$. Следовательно,

$$(a+b)^2+a(a+b)+b^2=0, \text{ а значит,}$$

$$2a^2+3ab+2b^2=2(a+3b/4)^2+7b^2/8=0, \text{ и поэтому } a=b=0 \text{ – противоречие.}$$

Пусть $a=b$. Тогда оба уравнения имеют вид $x^2+ax+a^2=0$. Дискриминант этого уравнения равен $-3a^2\leq 0$. Таким образом, единственная возможность: $a=b=0$. Очевидно, что эта пара удовлетворяет условию.

Ответ. (0; 0).

3. УСЛОВИЕ

В плоскости расположены n одинаковых зубчатых колёс так, что первое сцеплено зубцами со вторым, второе – с третьим и так далее, наконец, последнее n-е колесо сцеплено с первым. Могут ли вращаться колёса такой системы?

Решение. Два любых соседних колеса вращаются в противоположном направлении, значит, первое и последнее колёса также имеют противополож-ные направления вращения, что возможно тогда и только тогда, если число колёс чётно. Итак, колёса такой системы могут вращаться, если число колёс чётно, и не могут в противном случае.

4. УСЛОВИЕ

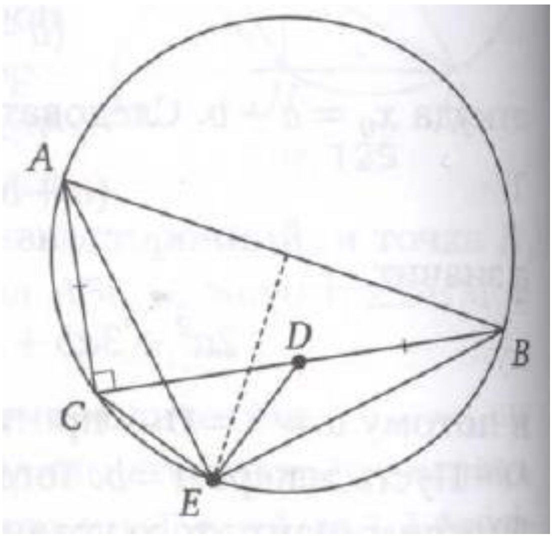
В единичный квадрат бросили 51 точку. Доказать, что некоторые три из них обязательно лежат внутри круга радиуса 1/7.

Доказательство. Разобьём квадрат на 25 равных квадратиков со стороной 1/5. Тогда найдётся один из этих квадратиков, в который попадает не меньше трёх точек (ибо $51 > 2 \cdot 25$). Круг, описанный около этого квадратика, содержит не менее трёх точек и имеет радиус $r = \sqrt{(1/50)} < \sqrt{(1/49)} = 1/7$.

5. УСЛОВИЕ

В окружность вписан прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB. На большем катете BC взята точка D так, что $AC = BD$, а точкаE – середина дуги AB, содержащей точку C. Найдите угол DEC.

Решение. Точка E – середина дуги AB, поэтому $AE = BE$. Кроме того, вписанные углы CAE и EBC, опирающиеся на одну дугу, равны. По условию $AC = BD$. Значит, треугольники ACE и BDE равны, откуда следует, что угол CEA равен углу BED. Но тогда угол DEC равен углу BEA и равны по 90^0, так как угол BEA равен углу BCA.



Ответ. 90^0.

6. УСЛОВИЕ

У Васи есть три банки с красками разного цвета. Сколькими различными способами он может покрасить забор, состоящий из 10 досок, так, чтобы любые две соседние доски были разных цветов и при этом он использовал краски всех трёх цветов? Ответ обоснуйте.

Решение. Посчитаем число способов, которыми можно покрасить забор так, чтобы любые 2 соседние доски были покрашены в различные цвета. Первую доску можно покрасить любой из трёх красок, вторую – одной из двух оставшихся. Третью – одной из двух красок, отличающихся по цвету от второй доски и т. д. Таким образом, есть число способов, равное $3 \cdot 2^9 = 1536$. В полученное число вошли и способы покраски забора в 2 цвета. Число таких способов равно 6 (первую доску можно покрасить тремя способами, а вторую – двумя, далее покраска определяется однозначно). Итого $1536 - 6 = 1530$ способов.

Ответ. 1530.