11 класс

11.1. Решите уравнение $2\sin^2 x+1=\cos(\sqrt{2}x)$.

Ответ: $x = 0$**. Решение.** Левая часть уравнения ≥ 1, а правая ≤ 1. Значит, уравнение равносильно системе: $\sin x = 0$, $\cos\sqrt{2}x=1$. Имеем: $x=\pi n$, $\sqrt{2}x=2\pi k$ (n, k – целые). Отсюда $n=k\cdot\sqrt{2}$. Поскольку $\sqrt{2}$ – число иррациональное, последнее равенство возможно лишь при $n = k = 0$.

11.2. Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC=a$ и $CB=b$. Найдите **а)** сторону квадрата с вершиной C наибольшей площади, целиком лежащего в треугольнике ABC; **б)** размеры прямоугольника с вершиной C наибольшей площади, целиком лежащего в треугольнике ABC.

Ответ. а) $\dfrac{ab}{a+b}$; **б)** $\dfrac{a}{2}$ и $\dfrac{b}{2}$. **Решение**. См. задачу 10.2

.

11.3. Последовательность a_n задается соотношениями $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{a_n^2}{2}$; $a_1=\dfrac{1}{2}$. Докажите, что a_n монотонно возрастает и $a_n<2$ при всех n.

Решение. Докажем монотонность a_n. Неравенство $a_{n+1}>a_n$ принимает вид $\dfrac{1}{2}+\dfrac{a_n^2}{2}>a_n \Leftrightarrow (a_n-1)^2>0$. Отметим, что данное неравенство является строгим, т.к. на самом деле $a_n<1$: действительно, докажем последний факт методом математической индукции. Имеем: $a_1=\dfrac{1}{2}<1$, и если при $n = k$ неравенство $0<a_k<1$ выполняется, то при $n = k + 1$ будем иметь $0<a_{k+1}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{a_k^2}{2}<\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$. *Замечание.* Решение данной задачи показывает, что по индукции иногда более сильное утверждение (здесь $a_n<1$) легче доказать, чем более слабое ($a_n<2$), т.к. более сильное утверждение используется в индукционном шаге.

11.4. На координатной плоскости рассматривается семейство всех концентрических окружностей с центром в точке $M(\sqrt{2};\sqrt{3})$. Докажите, что существует окружность этого семейства, внутри которой (т.е. внутри круга) ровно 2019 точек с целыми координатами.

Решение. Докажем сначала, что на любой окружности данного семейства лежит не более одной точки с целыми (и даже с рациональными координатами). От противного, пусть рациональные точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$ лежат на окружности данного семейства. Тогда $(x_1-\sqrt{2})^2+(y_1-\sqrt{3})^2=(x_2-\sqrt{2})^2+(y_2-\sqrt{3})^2$. Значит, $2(x_1-x_2)\sqrt{2}+2(y_1-y_2)\sqrt{3}=q$, где q – рациональное число. Если $(x_1-x_2)\cdot(y_1-y_2)\neq 0$, то возведя последнее равенство в квадрат, получим, что $\sqrt{6}$ – рациональное число, а это не так. Если одна из разностей, например, x_1-x_2, равна 0, то при $y_1\neq y_2$ получаем противоречие с иррациональностью $\sqrt{3}$. Значит, двух различных рациональных точек на одной окружности быть не может. Далее, заметим, что внутри круга малого радиуса целочисленных точек нет (можно взять радиус меньше расстояния от M до ближайшей целочисленной точки A(1;2)). С другой стороны, если взять достаточно большой радиус (например, больше 3000), то внутри круга окажется больше 2019 точек. Поскольку, в силу пункта а), при постепенном увеличении радиуса происходит скачок числа целочисленных точек только на единицу, то обязательно наступит момент, когда внутри круга будет ровно 2019 точек.

11.5. Сколько решений в целых числах x,y имеет уравнение $6x^2+2xy+y+x=2019$?
Ответ. 4 решения. **Решение.** См. задачу 10.5.