Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников
2018 – 2019 учебный год

Математика

11 класс

МЕТОДИКА ОЦЕНИВАНИЯ ЗАДАНИЙ

Баллы	Правильность (ошибочность) решения.
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

11.1. Постройте график функции y = $\sqrt{4sin^4x - 2cos2x + 3} + \sqrt{4cos^4x + 2cos2x + 3}$.
Ответ. Графиком функции будет прямая y = 4.
Решение.
y = $\sqrt{4sin^4x - 2cos2x + 3} + \sqrt{4cos^4x + 2cos2x + 3}$;
y = $\sqrt{4sin^4x - 2 + 4sin^2x + 3} + \sqrt{4cos^4x + 4cos^2x - 2 + 3}$;
y = $\sqrt{4sin^4x + 4sin^2x + 1} + \sqrt{4cos^4x + 4cos^2x + 1}$;
y = $2sin^2x + 1 + 2cos^2x + 1$, y =4.

11.2. Числа x и y удовлетворяют неравенству $x > y > \frac{3}{x-y}$. Докажите, что $x^2 > y^2+6$.
Решение.
Сложив неравенства $x > \frac{3}{x-y}$ и $y > \frac{3}{x-y}$, получаем, что $x + y > \frac{6}{x-y}$.
Из условия $x > y$ следует, что знаменатель дробей положителен, поэтому на него можно умножить без изменения знака неравенства. Тогда получаем: $(x + y)(x-y) > 6$, то есть $x^2 - y^2 > 6$. Утверждение доказано.

11.3. Пирамида Хеопса имеет в основании квадрат, а ее боковые грани — равные равнобедренные треугольники. Может ли угол грани при вершине пирамиды быть равным 95°?
Ответ. Нет, не может.
Решение.
Боковая поверхность пирамиды состоит из четырех равнобедренных и равных треугольников. Разрежем боковую поверхность пирамиды по боковым ребрам и развернем на плоскости. Тогда получим фигуру, изображенную на рис.1. При этом общая точка треугольников — вершина

пирамиды. Если бы угол грани при вершине пирамиды был 95°, то сумма четырех углов была бы равна 380°. А это невозможно, так как сумма углов при вершине пирамиды меньше 360° (это видно из рис. 1).

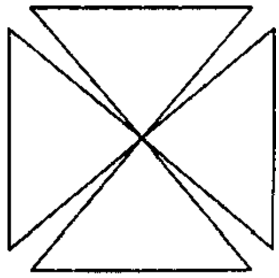

Рис.1

Комментарий. Верный ответ без обоснования - 0 баллов.

11.4. Докажите, что $n^2 + n + 1$ *при любом натуральном n:*
а) есть число нечетное;
б) не является квадратом никакого другого натурального числа.
Решение.
а) $n^2 + n + 1 = n(n + 1) + 1$. Так как $n(n + 1)$ — число четное, то $n(n + 1) + 1$— будет нечетным числом;
б) Ближайшие к числу n^2+n+1 квадраты находятся среди натуральных чисел n^2 и $(n + 1)^2$, но $n^2 < n^2 + n + 1 < (n + 1)^2$.
Так как n^2 и $(n + 1)^2$— квадраты последовательных натуральных чисел, а число $n^2 + n + 1$ находится между указанными квадратами, то оно само не может быть квадратом натурального числа.
11.5. На доске написаны три различных числа от 1 до 9. Одним ходом разрешается либо прибавить к двум из чисел 1, либо вычесть из всех чисел по 1. Верно ли, что сделав не более 30 таких ходов, всегда можно добиться того, чтобы на доске остались только нули?
Ответ. Неверно.
Решение. Пусть вначале на доске были написаны числа 1,8 и 9, и через несколько ходов из них получились нули. Изучим, как меняются разности между вторым и первым числом, а также между третьим и первым числом. Изначально они равны 7 и 8. При вычитании трёх единиц разности не меняются. Если единицы прибавляются к первым двум числам, то первая разность не меняется, а вторая уменьшается на 1. Аналогично, если единицы прибавляются к первому и третьему числам, то первая разность уменьшается на 1, а вторая не меняется. Наконец, при прибавлении к последним числам разности увеличиваются. Итак, поскольку первая разность уменьшилась на 7, а вторая - на 8, то к первому числу единица прибавлялась не меньше, чем 7 + 8 = 15 раз. Значит, из него должны были хотя бы 16 раз вычитать единицу, ибо в конце оно стало нулём. Поэтому итоговое количество операций не меньше, чем 15 + 16 = 31.
Комментарий. Верный ответ без обоснования - 0 баллов.
Приведен пример тройки чисел 1, 8, 9, но не приведено верное доказательство того, что в этом случае потребуется больше 30 ходов - 2 балла.