

Решения задач

1. Положительное число x увеличили на 69%. На сколько процентов увеличилось число $\sqrt{\frac{x}{5}}$?

Решение.

Увеличенное число составит $1,69x$, тогда из пропорции

$$\sqrt{\frac{x}{5}} - 100\%, \quad \text{определим } y = \frac{1,3\sqrt{\frac{x}{5}} \cdot 100}{\sqrt{\frac{x}{5}}} = 130 (\%), \text{ а, значит, разность будет}$$
$$\sqrt{\frac{1,69x}{5}} - y\%$$

равна 30%.

Ответ: на 30%.

Указания. Только ответ – 0 баллов; ответ получен для какого-то конкретного x (без обоснования корректности подхода) – 2 балла; квадратный корень найден приближенно, например, с помощью калькулятора – 0 баллов.

2. Доказать, что если $a(a+b+c) < 0$, то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет 2 действительных корня.

Решение.

Доказательство. Так как $a(a+b+c) < 0$, то

$$\begin{cases} a > 0, \\ a+b+c < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a < 0, \\ a+b+c > 0. \end{cases}$$

Рассмотрим первый случай. Так как $a > 0$, то ветви параболы, заданной формулой $y = ax^2 + bx + c$, направлены вверх. А так как $y(1) = a + b + c < 0$, то существуют точки параболы, лежащие ниже оси Ox . Значит, парабола пересекает ось Ox в 2 точках. Поэтому уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два действительных корня.

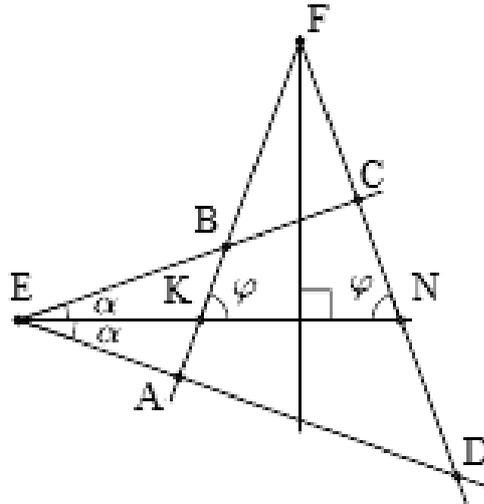
Во втором случае ветви параболы направлены вниз, а $y(1) = a + b + c > 0$, поэтому парабола пересекает ось Ox в 2 точках. Тогда уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет снова два действительных корня.

Указания. Возможно другое решение с исследованием знака дискриминанта.

3. Дан четырехугольник $ABCD$. Прямые DA и CB пересекаются в точке E , а прямые AB и DC – в точке F . Известно, что биссектрисы углов BEA и BFC перпендикулярны. Докажите, что вокруг $ABCD$ можно описать окружность.

Решение.

Доказательство.



Пусть K и N – точки пересечения биссектрисы угла AEB и прямых AF и DF . В треугольнике KFN биссектриса является высотой. Поэтому этот треугольник равнобедренный. Обозначим $\angle FKN = \angle FNK = \varphi$. Пусть также

$\angle BEK = \angle AEK = \alpha$. Угол DAB – внешний для треугольника EAK , он равен сумме двух внутренних углов этого треугольника, не смежных с ним:

$$\angle DAB = \angle AEK + \angle EKA = \angle AEK + \angle BKN = \alpha + \varphi.$$

С другой стороны, $\angle DCB = \angle NCE = 180^\circ - \angle ENC - \angle NEC = 180^\circ - \alpha - \varphi$.

Сложив полученные равенства, получим $\angle DAB + \angle BCD = 180^\circ$. Отсюда следует, что $ABCD$ – вписанный четырехугольник.

Указание. Доказано, что треугольник KFN – равнобедренный – 1 балл.

4. Положительно или отрицательно число $\operatorname{tg} \sqrt{5\pi} - 1$?

Решение.

$$\text{Докажем, что } \frac{5\pi}{4} < \sqrt{5\pi} < \frac{3\pi}{2}. \quad (1)$$

Все части неравенств положительны. После возведения в квадрат и сокращения на π получим: $\frac{25\pi}{16} < 5 < \frac{9\pi}{4}$. Правое неравенство очевидно.

Справедливость левого неравенства следует из соотношений: $5\pi < 9 \cdot 3,2 = 16$.

Неравенства (1) доказаны. На промежутке $\left(\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right)$ тангенс больше 1,

следовательно, $\operatorname{tg} \sqrt{5\pi} - 1 > 0$.

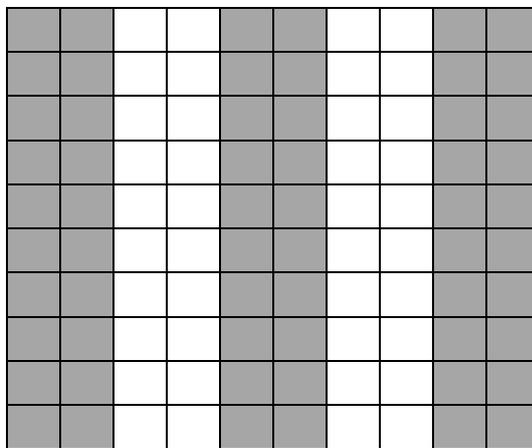
Ответ: положительно.

Указания. Только ответ – 0 баллов; при доказательстве неравенств (1) для π использовано приближенное значение 3,14 (после возведения в квадрат) – 4 балла; квадратный корень найден приближенно, например, с помощью калькулятора – 0 баллов.

5. В каждой клетке доски размером 10×10 сидит кузнечик. По свистку каждый из кузнечиков перепрыгивает через одну клетку по диагонали (не в соседнюю по диагонали клетку, а в следующую). При этом в некоторых клетках может оказаться больше одного кузнечика, а некоторые клетки окажутся незанятыми. Докажите, что при этом незанятых клеток будет не меньше 20.

Решение.

Покрасим клетки доски в чёрный и белый цвета, как показано на рисунке. В результате в чёрный цвет будет покрашено 60 клеток, а в белый – 40 клеток. Заметим, что с чёрной клетки кузнечик может перепрыгнуть только на белую, а с белой – только на чёрную. Следовательно, после того, как кузнечики совершили прыжок, на 60 чёрных клетках оказалось 40 кузнечиков. Значит, по крайней мере, 20 чёрных клеток окажутся незанятыми.



Указание. Рассмотрены только частные случаи – 0 баллов.